



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

دراسة حركية وتحريكية لمنظومة مستوية مولدة بالآلية السباعية

**A Kinematic and Dynamic Study of a Planar System Generated
by Seven Bar –Mechanism**

علاء خلوف د. مصطفى الحسن

1. ملخص البحث:

تماشياً مع متطلبات الثورة الروبوتية المتزايدة، وظهور الحاجة إلى آليات جديدة، أصبح من المهم الفهم الدقيق وإجراء توصيف رياضي لحركات الآليات الأكثر استخداماً في عصرنا الحالي، ومنها الآلية السباعية التي تم التركيز عليها في العديد من الدراسات الحديثة.

في هذا البحث، أجريت دراسة لمنظومة مستوية مولدة بالآلية السباعية، حيث اعتمدت الدراسة على التحليل الرياضي والبرامج الحاسوبية كبرنامج *Mathematica* وبرنامج *Matlab* وبرنامج *Solid Works* وذلك من أجل الحصول على توصيف رياضي للآلية ودراستها من الناحيتين الحركية والتحريكية.

باستخدام الدراسة الرياضية التحليلية والمصفوفات تم التوصل إلى توصيف دقيق لعلاقات الانزياح الزاوي والسرعة الزاوية والتسارع الزاوي لكل نقاط المنظومة، كما تم إجراء محاكاة حاسوبية لحركة المنظومة بمرور الزمن.

كلمات مفتاحية: آلية سباعية، سرعة، تسارع، إزاحة، مصفوفة.

1. Abstract:

With the increasing requirements of the Robotics uprising, and the need to new mechanisms. It has been important to understand accurately and perform a mathematical description to the movements of the most used mechanisms these days.

In this research, a study of a planar system generated by seven bar-mechanism was conducted. Since the study depended up on the mathematical analysis and computer programs like: Mathematica, Matlab, and Solid Works. In order to attain a mathematical description of the mechanism and study both the kinematical and dynamic sides.

Using the mathematical analyzing study and matrices, an accurate description of the angular displacement, velocity and acceleration for every point of the mechanism. Also, a computer simulation of the mechanism movement according to the time was done.

Key words: Seven bar Mechanism, velocity, acceleration, displacement, matrix.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي للمدة 4 - 5 اب 2024 دمشق - سورية

2. مقدمة:

الآلة ببساطة هي جهاز يتلقى الطاقة في بعض الأشكال المتاحة ويستخدمها للقيام بنوع معين من العمل أو يمكن اعتبار الآلة بمثابة عامل لنقل الطاقة أو تعديلها. [1]

الآلة:

هي مجموعة من المكونات التي يمكنها تحويل الطاقة بطريقة خاضعة للرقابة وتكون قادرة على أداء عمل مفيد. تتكون الآلة من عدد من الوصلات المرتبطة حركياً.

وهي عبارة عن مزيج من الأجسام المقاومة (وصلات أو عناصر) مع حركات نسبية مفيدة بشكل جيد، والتي تستخدم لتحويل أشكال أخرى من الطاقة إلى طاقة ميكانيكية أو تحويل وتعديل الطاقة المتاحة للقيام بنوع معين من العمل.

تصنيف الآلات: [1]

- 1- آلات توليد الطاقة الميكانيكية: وهي تقوم بتحويل أشكال الطاقة الأخرى إلى طاقة ميكانيكية.
- 2- آلات تحويل الطاقة الميكانيكية إلى أشكال أخرى من الطاقة: وتعرف بآلات التحويل، ومنها: المولدات الكهربائية، ومضخات الهواء، والمضخات الهيدروليكية وغيرها.
- 3- آلات استغلال الطاقة الميكانيكية في أداء الأعمال المفيدة: كالمخرطة وآلات التشغيل الأخرى.

يتطلب تحويل الطاقة وتعديلها داخل الآلة إدراج عدد من الأجزاء (الوصلات أو العناصر) التي تم اختيارها بحيث تنتج الحركة المطلوبة وتحمل بأمان القوى التي تتعرض لها حتى تتمكن الآلة من أداء مهمتها بنجاح.

تندرج دراسة الحركة النسبية بين الأجزاء المختلفة للآلة، والقوى المؤثرة عليها، ضمن مجال (نظرية الآلات) أو يمكن تعريف نظرية الآلات بأنها ذلك الفرع من العلوم الهندسية الذي يتناول دراسة الحركة النسبية بين عناصر الآلات المختلفة والقوى المؤثرة عليها.

الفرق بين الآلة والآلية: [1]

في علم الحركة، الآلية هي وسيلة لنقل الحركة النسبية أو التحكم فيها أو تقييدها. حيث أن الموضوع الأساسي للآليات هو الأجسام الصلبة المرتبطة ببعضها البعض عن طريق المفاصل، ويمكن تعريفها أيضاً على أنها مجموعة من الأجسام المقاومة التي تتشكل وتتصل بطريقة تسمح بحركة نسبية محددة بينها.

أما الآلة فهي مجموعة من الأجسام الصلبة أو المقاومة، المشكلة والمتصلة بحيث تتحرك بحركات نسبية محددة مع بعضها البعض، ومن وظائف الآلة: نقل القوة ونقل الحركة النسبية المحددة، ويُطبَّق مصطلح الآلية على مجموعة الأجسام الهندسية التي تشكل آلة أو جزءاً من آلة.

ومن الأمثلة البسيطة للآلة والآلية محرك الاحتراق الداخلي وآلية الكرنك المنزلق، حيث تعمل آلية الكرنك المنزلق على تحويل الحركة الدورانية للكرنك إلى حركة انسحابية للمنزلق، ففي محرك الاحتراق الداخلي تُستخدم الآلية نفسها لتحويل الطاقة الميكانيكية المتاحة عند المكبس إلى عزم الدوران المطلوب عند عمود الكرنك.

التحليل الحركي للآلية:



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي لمدة 4 - 5 اب 2024 دمشق - سورية

لكل آلية مخرجات خاصة بها عند تشغيلها، ويتم تحليل الآلية عن طريق حساب الموقع والسرعة والتسارع في نقاط مختلفة على الآليات، ومن أجل تحليل السرعة والتسارع عند أية نقطة من الآلية لا نحتاج إلى حساب القوى والضغوط المؤثرة في أجزاء الآلية. وبمعنى آخر، عند تحليل حركة آلية معينة، لا نحتاج إلى النظر في مساحة المقطع العرضي أو قوة الأجزاء في تلك الآلية. كما أنه لا يهم ما إذا كانت الأجزاء مصنوعة من الحديد الزهر أو الخشب أو أي شيء آخر لدراساتها وتحليل حركتها.

كينيماتيكا (حركة) الآلية:

تتضمن دراسة الحركات النسبية بين الأجزاء المختلفة من الآلية، دون النظر إلى القوى الناتجة عن الحركة في الأجزاء، إنها الدراسة من وجهة النظر الهندسية التي يمكننا من خلالها معرفة الإزاحة والسرعة والتسارع عند النقاط المختلفة من أجزاء الآلية.

ديناميك (تحريك) الآلية:

يتضمن حسابات القوى المؤثرة على أجزاء مختلفة من الآلية، حيث يمكن تقسيم القوى المؤثرة على الآلية إلى سكونية وحركية. في حالة القوى السكونية، تتم دراسة القوى عندما تكون جميع أجزاء الآليات في حالة توازن، حيث يتم في علم الحركة دراسة قوى القصور الذاتي التي قد تحدث بسبب اتحاد الكتلة وحركة الأجزاء.

أهمية البحث:

ساهم استخدام الأسلوب التحليلي في إيجاد أدوات مفيدة لحل مسائل معقدة ومعرفة الإزاحة والسرعة والتسارع عند النقاط المختلفة من أجزاء الآلية.

يوفر التحليل الرياضي لأي آلية جديدة الفهم العميق لحركة الآلة ويعطي فكرة جيدة حول المجالات التي يمكن استثمار الآلة فيها كعلم لروبوت والروافع وغيرها.

الدراسات المرجعية:

- في عام 1996، قام *Gossem [2]* بتطوير نظام ذي سبع وصلات بإضافة كرنك (عمود مرفق) إلى ميكانيزم *Watt* ذي الوصلات الستة لتكوين ميكانيزم مستوي بثلاث أرجل مع وصلة ثلاثية واحدة وحل حركتها ومواصفاتها.
 - وفي عام 2006، استخدم *Tong [3]* سمة المسارات المتعامدة للبحث في ميكانيزم ذي سبعة قضبان وثلاث حلقات والذي تم تطويره من نظام *Stephanson III* ذي الوصلات الست.
 - وفي عام 2010، قام الباحثان *Guowu Wei* و *A. Bahmani Jian S. Dai [4]* بتحليل هندسي وحركي (كينماتيكي) لميكانيزم مؤلف من سبعة قضبان ذي ثلاث مفاصل ثابتة دورانية مركبة، حيث تم اعتماد نظام تصنيف قائم على معيار قابلية الدوران بأنواعه المختلفة مستخرج من التغيرات في بارامترات الوصلة.
- وقد تم تطوير معادلات الصيغة باستخدام معادلتين تحليليتين للقضبان الأربعة على الترتيب من أجل التحليل الهندسي للميكانيزم.
- تم التوصل من خلال البحث إلى المصفوفات اليعقوبية للميكانيزم، وعرض التحليل الحركي له، من أجل اختبار فضاء العمل والتفرد والتوزع الإيزوتروبي.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي للمدة 4 - 5 اب 2024 دمشق - سورية

• قدّم *Vaddi* و *Seth* [5-6] سمة توليد التوابع القابلة للبرمجة. ففي البداية درسا ميكانيزماً ذا خمسة قضبان ودرجتي حرية والتي تعد القاعدة التي على أساسها يمكن تركيب ميكانيزمات توليد توابع قابلة للبرمجة. وفي التقارير المتعلقة بذلك نوقشت الاعتبارات التصميمية والكينماتيكية المقرر وأبعاد الوصلات، ونقاط الوصل وتم اختيار الدخل التحكمي.

في المرحلة الثانية بحث *Vaddi* و *Seth* في مولدة توابع قابلة للبرمجة لنقل الخرج، ذات سبع قضبان.

• كشف *Herman* [7] عن ميكانيزم تشغيل بمساعدة الحاسب *CAM* هجين، يعطي هذا الميكانيزم مرونة إضافية للنظام، ويتطلب فقط طاقة عظمى صغيرة وعزم أعظمى صغير من محرك السيرفو.

لتحقيق الدرجة نفسها من المرونة في فترة الاستقرار يحتاج الحل الهجين على الأقل قيمة أسية واحدة أقل من الطاقة العظمى من محرك السيرفو إلى الحل الهجين.

• افترض *Dugler* و *Kirecci* [8,9] مفعلاً هجيناً وتحديداً ترتيب مؤلف من ميكانيزم ذي سبع وصلات ودرجتي حرية مسطح (مستوي) بمحركين أحدهما ذو سرعة ثابتة والآخر سيرفو. لقد درسا السلوك الديناميكي للمفعل الهجين بتطبيق محاكاة عددية للمنظومة ككل.

علاوةً على ذلك، تم تطبيق ميكانيك لاغرانج لاشتقاق معادلات الحركة. كما تم تمثيل ما طُور باستخدام نظام التحكم التكامل التفاضلي التناسبي *PID* فيما يخص قدرة النموذج وذلك تبعاً لنتائج المحاكاة.

يمكن للمفعل الهجين أن يوفر مقداراً كبيراً من الطاقة عندما يتم تخفيض عزم عطالته إلى الحد الأدنى المطلوب.

تعتمد الكلفة الأولية للمفعل على الطاقة المطلوبة للآلة المعطاة، وتبين أن متطلبات الطاقة الأعلى تنقص الكلفة النسبية للمفعل الهجين إذا ما قورنت بنظام قيادة سيرفو مباشر.

خلال الدراسات المرجعية السابقة تم التركيز على عدة نقاط منها:

- زيادة عدد الوصلات.
 - التحكم بالسرعة.
 - دراسة حركة الميكانيزمات.
 - الدراسة التحليلية الرياضية للميكانيزمات.
 - توصيل عدة ميكانيزمات للحصول على ميكانيزم جديد.
 - التحكم بالتسارع.
 - تغيير أشكال الحلقات وعددها.
 - تغيير عدد المفاصل الثابتة.
 - تطبيق الميكانيزمات على الأذرع الروبوتية.
 - إيجاد العلاقات الرياضية والمصفوفات النازمة للميكانيزمات المدروسة.
- ومنه تم التوصل إلى هدف البحث.

1. هدف البحث:

الحصول على توصيف رياضي دقيق للإزاحة والسرعة والتسارع لمنظومة مستوية مولدة بالآلية السباعية.



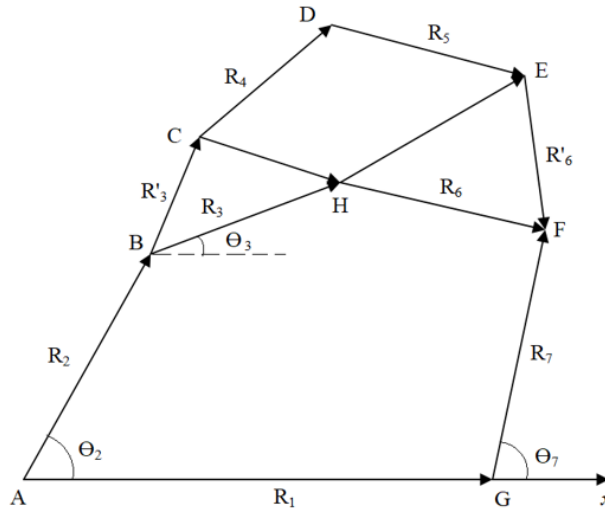
المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

2. مواد وطرق البحث:

اعتمدت الدراسة على المصفوفات، والتحليل الرياضي، وبعض البرامج الحاسوبية المساعدة، حيث تم استخدام برنامج *Mathematica* من أجل تبسيط العلاقات الرياضية وإيجاد الحلول المختزلة، كما تم استخدام برنامج *Matlab* للحصول على مخطط تمثيلي للمنظومة، وتم رسمها أيضاً باستخدام برنامج *Solid Work*، لمحاكاة حركتها كما هي في الواقع واستنتاج النقاط التي تمثل مسار الحركة.

3. الآلة السباعية:

ليكن لدينا آلة سباعية موصفة بالشكل التالي:



الشكل (1) - مخطط شعاعي للآلة السباعية المدروسة

تتكون الآلة من سبعة أجسام (متضمنة الجسم الثابت) وهي $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, R_7$ وثمانية مفاصل دورانية A, B, C, D, E, F, G, H
نريد حساب الانزياح الزاوي للزوايا $\theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6$

حساب θ_3

لدينا العلاقة الشعاعية التالية التي تعبر عن موضع النقطة H:

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BH}$$

$$\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} R_2 \cos \theta_2 \\ R_2 \sin \theta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_3 \cos \theta_3 \\ R_3 \sin \theta_3 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} R_2 \cos \theta_2 + R_3 \cos \theta_3 \\ R_2 \sin \theta_2 + R_3 \sin \theta_3 \end{pmatrix}$$

كما لدينا العلاقة الشعاعية التالية التي تعبر عن موضع النقطة F:

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GF}$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_7 \cos \theta_7 \\ R_7 \sin \theta_7 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} R_1 + R_7 \cos \theta_7 \\ R_7 \sin \theta_7 \end{pmatrix}$$

ونريد إيجاد إحداثيات الشعاع \overrightarrow{HF} :

$$\overrightarrow{HF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AH}$$

$$\overrightarrow{HF} = \begin{pmatrix} R_1 + R_7 \cos \theta_7 - R_2 \cos \theta_2 - R_3 \cos \theta_3 \\ R_7 \sin \theta_7 - R_2 \sin \theta_2 - R_3 \sin \theta_3 \end{pmatrix}$$

ونعلم أن جداء شعاع بمرافقه ينتج عنه مربع طويلته:

$$(\overrightarrow{HF})^T \cdot \overrightarrow{HF} = R_6^2$$

$$(R_1 - \cos(\theta_2)R_2 - \cos(\theta_3)R_3 + \cos(\theta_7)R_7)^2 + (\sin(\theta_2)R_2 + \sin(\theta_3)R_3 - \sin(\theta_7)R_7)^2 = R_6^2 \dots (1)$$

نريد حساب θ_3 باتباع أسلوب حساب ظل نصف الزاوية

$$t = \tan\left(\frac{\theta_3}{2}\right); \sin \theta_3 = \frac{2t}{1+t^2}; \cos \theta_3 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

بعد التعويض والاختزال نتجت المعادلة التالية:

$$\frac{N-L}{2}t^2 + Mt + \frac{N+L}{2} = 0$$

حيث الثوابت N,L,M لها الشكل التالي:

$$N = 2(R_1(2R_7 \cos(\theta_7) - 2R_2 \cos(\theta_2)) - 2R_2 R_7 \cos(\theta_2 - \theta_7) + R_1^2 + R_2^2 + R_3^2 - R_6^2 + R_7^2)$$

$$L = -4R_3(-R_2 \cos(\theta_2) + R_7 \cos(\theta_7) + R_1)$$

$$M = 4R_2 R_3 \sin(\theta_2) - 4R_3 R_7 \sin(\theta_7)$$

والحل الأخير يكون له الشكل التالي:

$$\theta_3 = 2 \arctan\left(\frac{-M \pm \sqrt{M^2 - N^2 + L^2}}{N - L}\right)$$

حساب θ_6 :



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

لدينا العلاقة الشعاعية التالية التي تعبر عن موضع النقطة H:

$$\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GF} - \overrightarrow{HF}$$

$$\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_7 \cos \theta_7 \\ R_7 \sin \theta_7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_6 \cos \theta_6 \\ R_6 \sin \theta_6 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} R_1 + R_7 \cos \theta_7 - R_6 \cos \theta_6 \\ R_7 \sin \theta_7 - R_6 \sin \theta_6 \end{pmatrix}$$

ونريد إيجاد إحداثيات الشعاع \overrightarrow{BH}

$$\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{BH} = \begin{pmatrix} R_1 + R_7 \cos \theta_7 - R_6 \cos \theta_6 - R_2 \cos \theta_2 \\ R_7 \sin \theta_7 - R_6 \sin \theta_6 - R_2 \sin \theta_2 \end{pmatrix}$$

ونعلم أن جداء شعاع بمرافقه ينتج عنه مربع طويلته:

$$(\overrightarrow{BH})^T \cdot \overrightarrow{BH} = R_3^2$$

$$(R_1 - \cos(\theta_2)R_2 - \cos(\theta_6)R_6 + \cos(\theta_7)R_7)^2 + (\sin(\theta_2)R_2 + \sin(\theta_6)R_6 - \sin(\theta_7)R_7)^2 = R_3^2 \dots (2)$$

نريد حساب θ_6 باتباع أسلوب حساب ظل نصف الزاوية:

$$t = \tan\left(\frac{\theta_6}{2}\right); \sin \theta_6 = \frac{2t}{1+t^2}; \cos \theta_6 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\frac{N-L}{2}t^2 + Mt + \frac{N+L}{2} = 0$$

حيث الثوابت N,L,M لها الشكل التالي:

$$N = 2(R_1(2R_7 \cos(\theta_7) - 2R_2 \cos(\theta_2)) - 2R_2 R_7 \cos(\theta_2 - \theta_7) + R_1^2 + R_2^2 - R_3^2 + R_6^2 + R_7^2)$$

$$L = -4R_6(-R_2 \cos(\theta_2) + R_7 \cos(\theta_7) + R_1)$$

$$M = 4R_2 R_6 \sin(\theta_2) - 4R_6 R_7 \sin(\theta_7)$$

والحل الأخير يكون له الشكل التالي:

$$\theta_6 = 2 \arctan\left(\frac{-M \pm \sqrt{M^2 - N^2 + L^2}}{N - L}\right)$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

حساب θ_4 :

لدينا العلاقة الشعاعية التالية التي تعبر عن موضع النقطة D:

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} R_2 \cos \theta_2 \\ R_2 \sin \theta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_3 \cos(\theta_3 + \beta_3) \\ R_3 \sin(\theta_3 + \beta_3) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_4 \cos \theta_4 \\ R_4 \sin \theta_4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} R_2 \cos \theta_2 + R_3 \cos(\theta_3 + \beta_3) + R_4 \cos \theta_4 \\ R_2 \sin \theta_2 + R_3 \sin(\theta_3 + \beta_3) + R_4 \sin \theta_4 \end{pmatrix}$$

كما لدينا العلاقة الشعاعية التالية التي تعبر عن موضع النقطة E:

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GF} - \overrightarrow{EF}$$

$$\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_7 \cos \theta_7 \\ R_7 \sin \theta_7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_6 \cos(\theta_6 - \beta_6) \\ R_6 \sin(\theta_6 - \beta_6) \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AE} = \begin{pmatrix} R_1 + R_7 \cos \theta_7 - R_6 \cos(\theta_6 - \beta_6) \\ R_7 \sin \theta_7 - R_6 \sin(\theta_6 - \beta_6) \end{pmatrix}$$

ونريد إيجاد إحداثيات الشعاع \overrightarrow{DE} :

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{DE} = \begin{pmatrix} R_1 + R_7 \cos \theta_7 - R_6 \cos(\theta_6 - \beta_6) - R_2 \cos \theta_2 - R_3 \cos(\theta_3 + \beta_3) - R_4 \cos \theta_4 \\ R_7 \sin \theta_7 - R_6 \sin(\theta_6 - \beta_6) - R_2 \sin \theta_2 - R_3 \sin(\theta_3 + \beta_3) - R_4 \sin \theta_4 \end{pmatrix}$$

ونعلم أن جداء شعاع بمرافقه ينتج عنه مربع طويلته:

$$(\overrightarrow{DE})^T \cdot \overrightarrow{DE} = R_5^2$$

$$(-R_1 + \cos(\theta_2)R_2 + \cos(\theta_4)R_4 - \cos(\theta_7)R_7 + \cos(\beta_3 + \theta_3)R'_3 + \cos(\beta_6 - \theta_6)R'_6)^2 + (\sin(\theta_2)R_2 + \sin(\theta_4)R_4 - \sin(\theta_7)R_7 + \sin(\beta_3 + \theta_3)R'_3 - \sin(\beta_6 - \theta_6)R'_6)^2 = R_5^2 \dots (3)$$

نريد حساب θ_4 باتباع أسلوب حساب ظل نصف الزاوية:

$$t = \tan\left(\frac{\theta_4}{2}\right); \sin \theta_4 = \frac{2t}{1+t^2}; \cos \theta_4 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\frac{N-L}{2}t^2 + Mt + \frac{N+L}{2} = 0$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

حيث الثوابت N,L,M لها الشكل التالي:

$$N = 2(-2R_1(R'_3 \cos(\beta_3 + \theta_3) + R'_6 \cos(\beta_6 - \theta_6) + R_2 \cos(\theta_2) - R_7 \cos(\theta_7)) - 2R_7 R'_3 \cos(\beta_3 + \theta_3 - \theta_7) - 2R_7 R'_6 \cos(\beta_6 - \theta_6 + \theta_7) + 2R'_3 R'_6 \cos(\beta_3 + \beta_6 + \theta_3 - \theta_6) + R_2(2R'_3 \cos(\beta_3 - \theta_2 + \theta_3) + 2R'_6 \cos(\beta_6 + \theta_2 - \theta_6) - 2R_7 \cos(\theta_2 - \theta_7)) + (R'_3)^2 + (R'_6)^2 + R_1^2 + R_2^2 + R_4^2 - R_5^2 + R_7^2)$$

$$L = 4R_4(R'_3 \cos(\beta_3 + \theta_3) + R'_6 \cos(\beta_6 - \theta_6) + R_2 \cos(\theta_2) - R_7 \cos(\theta_7) - R_1)$$

$$M = 4R_4 R'_3 \sin(\beta_3 + \theta_3) - 4R_4 R'_6 \sin(\beta_6 - \theta_6) + 4R_2 R_4 \sin(\theta_2) - 4R_7 R_4 \sin(\theta_7)$$

والحل الأخير يكون له الشكل التالي:

$$\theta_4 = 2 \arctan\left(\frac{-M \pm \sqrt{M^2 - N^2 + L^2}}{N - L}\right)$$

حساب θ_5 :

لدينا العلاقة الشعاعية التالية التي تعبر عن موضع النقطة C:

$$\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} R_2 \cos \theta_2 \\ R_2 \sin \theta_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_3 \cos(\theta_3 + \beta_3) \\ R_3 \sin(\theta_3 + \beta_3) \end{pmatrix}$$

$$\vec{AC} = \begin{pmatrix} R_2 \cos \theta_2 + R_3 \cos(\theta_3 + \beta_3) \\ R_2 \sin \theta_2 + R_3 \sin(\theta_3 + \beta_3) \end{pmatrix}$$

كما لدينا العلاقة الشعاعية التالية التي تعبر عن موضع النقطة D:

$$\vec{AD} = \vec{AG} + \vec{GF} - \vec{EF} - \vec{DE}$$

$$\vec{AD} = \begin{pmatrix} R_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_7 \cos \theta_7 \\ R_7 \sin \theta_7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_6 \cos(\theta_6 - \beta_3) \\ R_6 \sin(\theta_6 - \beta_6) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} R_5 \cos \theta_5 \\ R_5 \sin \theta_5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{AD} = \begin{pmatrix} R_1 + R_7 \cos \theta_7 - R_6 \cos(\theta_6 - \beta_3) - R_5 \cos \theta_5 \\ R_7 \sin \theta_7 - R_6 \sin(\theta_6 - \beta_6) - R_5 \sin \theta_5 \end{pmatrix}$$

ونريد إيجاد إحداثيات الشعاع \vec{CD} :

$$\vec{CD} = \vec{AD} - \vec{AC}$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} R_1 + R_7 \cos \theta_7 - \dot{R}_6 \cos(\theta_6 - \beta_3) - R_5 \cos \theta_5 - R_2 \cos \theta_2 - \dot{R}_3 \cos(\theta_3 + \beta_3) \\ R_7 \sin \theta_7 - \dot{R}_6 \sin(\theta_6 - \beta_6) - R_5 \sin \theta_5 - R_2 \sin \theta_2 - \dot{R}_3 \sin(\theta_3 + \beta_3) \end{pmatrix}$$

ونعلم أن جداء شعاع بمرافقه ينتج عنه مربع طويلته:

$$(\overrightarrow{CD})^T \cdot \overrightarrow{CD} = R_4^2$$

$$(-R_1 + \cos(\theta_2)R_2 + \cos(\theta_5)R_5 - \cos(\theta_7)R_7 + \cos(\beta_3 + \theta_3)R'_3 + \cos(\beta_6 - \theta_6)R'_6)^2 + (\sin(\theta_2)R_2 + \sin(\theta_5)R_5 - \sin(\theta_7)R_7 + \sin(\beta_3 + \theta_3)R'_3 - \sin(\beta_6 - \theta_6)R'_6)^2 = R_4^2 \dots (4)$$

نريد حساب θ_5 باتباع أسلوب حساب ظل نصف الزاوية:

$$t = \tan\left(\frac{\theta_5}{2}\right); \sin \theta_5 = \frac{2t}{1+t^2}; \cos \theta_5 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\frac{N-L}{2}t^2 + Mt + \frac{N+L}{2} = 0$$

حيث الثوابت N,L,M لها الشكل التالي:

$$N = 2(-2R_1(R'_3 \cos(\beta_3 + \theta_3) + R'_6 \cos(\beta_6 - \theta_6) + R_2 \cos(\theta_2) - R_7 \cos(\theta_7)) - 2R_7R'_3 \cos(\beta_3 + \theta_3 - \theta_7) - 2R_7R'_6 \cos(\beta_6 - \theta_6 + \theta_7) + 2R'_3R'_6 \cos(\beta_3 + \beta_6 + \theta_3 - \theta_6) + R_2(2R'_3 \cos(\beta_3 - \theta_2 + \theta_3) + 2R'_6 \cos(\beta_6 + \theta_2 - \theta_6) - 2R_7 \cos(\theta_2 - \theta_7)) + (R'_3)^2 + (R'_6)^2 + R_1^2 + R_2^2 - R_4^2 + R_5^2 + R_7^2)$$

$$L = 4R_5(R'_3 \cos(\beta_3 + \theta_3) + R'_6 \cos(\beta_6 - \theta_6) + R_2 \cos(\theta_2) - R_7 \cos(\theta_7) - R_1)$$

$$M = 4R_5R'_3 \sin(\beta_3 + \theta_3) - 4R_5R'_6 \sin(\beta_6 - \theta_6) + 4R_2R_5 \sin(\theta_2) - 4R_7R_5 \sin(\theta_7)$$

والحل الأخير يكون له الشكل التالي:

$$\theta_5 = 2 \arctan\left(\frac{-M \pm \sqrt{M^2 - N^2 + L^2}}{N - L}\right)$$

حساب θ_3 و θ_6 :

لدينا من الحلقة الأولى المغلقة:

$$\overrightarrow{R_1} + \overrightarrow{R_7} - \overrightarrow{R_6} - \overrightarrow{R_3} - \overrightarrow{R_2} = \vec{0}$$

بإسقاط العلاقة السابقة على محوري الجملة الإحداثية نحصل على:

$$R_1 + R_7 \cos \theta_7 - R_6 \cos \theta_6 - R_3 \cos \theta_3 - R_2 \cos \theta_2 = 0$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$R_7 \sin \theta_7 - R_6 \sin \theta_6 - R_3 \sin \theta_3 - R_2 \sin \theta_2 = 0$$

باشتقاق العلاقات السابقة:

$$-R_7 \sin \theta_7 \dot{\theta}_7 + R_6 \sin \theta_6 \dot{\theta}_6 + R_3 \sin \theta_3 \dot{\theta}_3 + R_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 = 0 \dots (5)$$

$$R_7 \cos \theta_7 \dot{\theta}_7 - R_6 \cos \theta_6 \dot{\theta}_6 - R_3 \cos \theta_3 \dot{\theta}_3 - R_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 = 0 \dots (6)$$

باستخدام المصفوفات نكتب:

$$\begin{pmatrix} R_3 \sin \theta_3 & R_6 \sin \theta_6 \\ R_3 \cos \theta_3 & R_6 \cos \theta_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R_2 \sin \theta_2 & R_7 \sin \theta_7 \\ -R_2 \cos \theta_2 & R_7 \cos \theta_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_7 \end{pmatrix}$$

وبحل المعادلتين السابقتين نحصل على:

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_6 \end{pmatrix} = \frac{1}{R_3 R_6 \sin(\theta_3 - \theta_6)} * \begin{pmatrix} R_6 \cos \theta_6 & -R_6 \sin \theta_6 \\ -R_3 \cos \theta_3 & R_3 \sin \theta_3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -R_2 \sin \theta_2 & R_7 \sin \theta_7 \\ -R_2 \cos \theta_2 & R_7 \cos \theta_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_7 \end{pmatrix}$$

حساب θ_4 و θ_5 :

لدينا من الحلقة الثانية المغلقة:

$$\vec{R}_1 + \vec{R}_7 - \vec{R}'_6 - \vec{R}_5 - \vec{R}_4 - \vec{R}'_3 - \vec{R}_2 = \vec{0}$$

بإسقاط العلاقة السابقة على محوري الجملة الإحداثية نحصل على:

$$R_1 + R_7 \cos \theta_7 - R'_6 \cos(\theta_6 - \beta_6) - R_5 \cos \theta_5 - R_4 \cos \theta_4 - R'_3 \cos(\theta_3 + \beta_3) - R_2 \cos \theta_2 = 0$$

$$R_7 \sin \theta_7 - R'_6 \sin(\theta_6 - \beta_6) - R_5 \sin \theta_5 - R_4 \sin \theta_4 - R'_3 \sin(\theta_3 + \beta_3) - R_2 \sin \theta_2 = 0$$

باشتقاق العلاقات السابقة:

$$R_4 \sin \theta_4 \dot{\theta}_4 + R_5 \sin \theta_5 \dot{\theta}_5 - R_7 \sin \theta_7 \dot{\theta}_7 + R_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 + R'_6 \sin(\theta_6 - \beta_6) \dot{\theta}_6 + R'_3 \sin(\theta_3 + \beta_3) \dot{\theta}_3 = 0 \dots (7)$$

$$-R_4 \cos \theta_4 \dot{\theta}_4 - R_5 \cos \theta_5 \dot{\theta}_5 + R_7 \cos \theta_7 \dot{\theta}_7 - R_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2 - R'_6 \cos(\theta_6 - \beta_6) \dot{\theta}_6 - R'_3 \cos(\theta_3 + \beta_3) \dot{\theta}_3 = 0 \dots (8)$$

باستخدام المصفوفات نكتب:



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$\begin{pmatrix} R_4 \sin \theta_4 & R_5 \sin \theta_5 \\ R_4 \cos \theta_4 & R_5 \cos \theta_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_4 \\ \dot{\theta}_5 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -R_2 \sin \theta_2 & R_7 \sin \theta_7 - R'_3 \sin(\theta_3 + \beta_3) & -R'_6 \sin(\theta_6 - \beta_6) \\ -R_2 \cos \theta_2 & R_7 \cos \theta_7 - R'_3 \cos(\theta_3 + \beta_3) & -R'_6 \cos(\theta_6 - \beta_6) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_7 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_6 \end{pmatrix}$$

وبحل المعادلتين السابقتين نحصل على:

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta}_4 \\ \dot{\theta}_5 \end{pmatrix} = \frac{1}{R_4 R_5 \sin(\theta_4 - \theta_5)} * \begin{pmatrix} R_5 \cos \theta_5 & -R_5 \sin \theta_5 \\ -R_4 \cos \theta_4 & R_4 \sin \theta_4 \end{pmatrix} \\ * \begin{pmatrix} -R_2 \sin \theta_2 & R_7 \sin \theta_7 - R'_3 \sin(\theta_3 + \beta_3) & -R'_6 \sin(\theta_6 - \beta_6) \\ -R_2 \cos \theta_2 & R_7 \cos \theta_7 - R'_3 \cos(\theta_3 + \beta_3) & -R'_6 \cos(\theta_6 - \beta_6) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_7 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_6 \end{pmatrix}$$

حساب $\dot{\theta}_3$ و $\dot{\theta}_6$:

باشتقاق العلاقات (5) و (6) نحصل على:

$$\begin{aligned} & -R_7 \sin \theta_7 \ddot{\theta}_7 + R_6 \sin \theta_6 \ddot{\theta}_6 + R_3 \sin \theta_3 \ddot{\theta}_3 + R_2 \sin \theta_2 \ddot{\theta}_2 \\ & = R_7 \cos \theta_7 \dot{\theta}_7^2 - R_6 \cos \theta_6 \dot{\theta}_6^2 - R_3 \cos \theta_3 \dot{\theta}_3^2 - R_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2^2 \\ & R_7 \cos \theta_7 \ddot{\theta}_7 - R_6 \cos \theta_6 \ddot{\theta}_6 - R_3 \cos \theta_3 \ddot{\theta}_3 - R_2 \cos \theta_2 \ddot{\theta}_2 \\ & = R_7 \sin \theta_7 \dot{\theta}_7^2 - R_6 \sin \theta_6 \dot{\theta}_6^2 - R_3 \sin \theta_3 \dot{\theta}_3^2 - R_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2^2 \end{aligned}$$

باستخدام المصفوفات نكتب:

$$\begin{pmatrix} R_3 \sin \theta_3 & R_6 \sin \theta_6 \\ R_3 \cos \theta_3 & R_6 \cos \theta_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_6 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} -R_2 \sin \theta_2 & R_7 \sin \theta_7 - R_2 \cos \theta_2 & -R_3 \cos \theta_3 & -R_6 \cos \theta_6 & R_7 \cos \theta_7 \\ -R_2 \cos \theta_2 & R_7 \cos \theta_7 & R_2 \sin \theta_2 & R_3 \sin \theta_3 & R_6 \sin \theta_6 - R_7 \sin \theta_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_7 \\ \dot{\theta}_2^2 \\ \dot{\theta}_3^2 \\ \dot{\theta}_6^2 \\ \dot{\theta}_7^2 \end{pmatrix}$$

وبحل المعادلتين السابقتين نحصل على:



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$= \frac{1}{R_3 R_6 \sin(\theta_3 - \theta_6)} * \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -R_2 \sin \theta_2 & R_7 \sin \theta_7 & -R_2 \cos \theta_2 & -R_3 \cos \theta_3 & -R_6 \cos \theta_6 & R_7 \cos \theta_7 \\ -R_2 \cos \theta_2 & R_7 \cos \theta_7 & R_2 \sin \theta_2 & R_3 \sin \theta_3 & R_6 \sin \theta_6 & -R_7 \sin \theta_7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_7 \\ \dot{\theta}_2^2 \\ \dot{\theta}_3^2 \\ \dot{\theta}_6^2 \\ \dot{\theta}_7^2 \end{pmatrix}$$

حساب $\ddot{\theta}_4$ و $\ddot{\theta}_5$:

باشتقاق العلاقات (7) و (8) نحصل على:

$$\begin{aligned} & R_4 \sin \theta_4 \ddot{\theta}_4 + R_5 \sin \theta_5 \ddot{\theta}_5 - R_7 \sin \theta_7 \ddot{\theta}_7 + R_2 \sin \theta_2 \ddot{\theta}_2 + R'_6 \sin(\theta_6 - \beta_6) \ddot{\theta}_6 \\ & + R'_3 \sin(\theta_3 + \beta_3) \ddot{\theta}_3 \\ & = -R_4 \cos \theta_4 \dot{\theta}_4^2 - R_5 \cos \theta_5 \dot{\theta}_5^2 + R_7 \cos \theta_7 \dot{\theta}_7^2 - R_2 \cos \theta_2 \dot{\theta}_2^2 \\ & - R'_6 \cos(\theta_6 - \beta_6) \dot{\theta}_6^2 - R'_3 \cos(\theta_3 + \beta_3) \dot{\theta}_3^2 \\ & -R_4 \cos \theta_4 \ddot{\theta}_4 - R_5 \cos \theta_5 \ddot{\theta}_5 + R_7 \cos \theta_7 \ddot{\theta}_7 - R_2 \cos \theta_2 \ddot{\theta}_2 - R'_6 \cos(\theta_6 - \beta_6) \ddot{\theta}_6 \\ & - R'_3 \cos(\theta_3 + \beta_3) \ddot{\theta}_3 \\ & = -R_4 \sin \theta_4 \dot{\theta}_4^2 - R_5 \sin \theta_5 \dot{\theta}_5^2 + R_7 \sin \theta_7 \dot{\theta}_7^2 - R_2 \sin \theta_2 \dot{\theta}_2^2 \\ & - R'_6 \sin(\theta_6 - \beta_6) \dot{\theta}_6^2 - R'_3 \sin(\theta_3 + \beta_3) \dot{\theta}_3^2 \end{aligned}$$

باستخدام المصفوفات نكتب:



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$\begin{pmatrix} R_4 \sin \theta_4 & R_5 \sin \theta_5 \\ R_4 \cos \theta_4 & R_5 \cos \theta_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_4 \\ \ddot{\theta}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R_2 \sin \theta_2 & -R_2 \cos \theta_2 \\ R_7 \sin \theta_7 & R_7 \sin \theta_7 \\ -R'_3 \sin(\theta_3 + \beta_3) & -R'_3 \cos(\theta_3 + \beta_3) \\ -R'_6 \sin(\theta_6 - \beta_6) & -R'_6 \cos(\theta_6 - \beta_6) \\ -R_2 \cos \theta_2 & R_2 \sin \theta_2 \\ -R'_3 \cos(\theta_3 + \beta_3) & R'_3 \sin(\theta_3 + \beta_3) \\ -R_4 \cos \theta_4 & R_4 \cos \theta_4 \\ -R_5 \cos \theta_5 & R_5 \sin \theta_5 \\ -R'_6 \cos(\theta_6 - \beta_6) & R'_6 \sin(\theta_6 - \beta_6) \\ R_7 \cos \theta_7 & -R_7 \sin \theta_7 \end{pmatrix}^T * \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_7 \\ \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_6 \\ \dot{\theta}_2^2 \\ \dot{\theta}_3^2 \\ \dot{\theta}_4^2 \\ \dot{\theta}_5^2 \\ \dot{\theta}_6^2 \\ \dot{\theta}_7^2 \end{pmatrix}$$

وبحل المعادلتين السابقتين نحصل على:

$$\begin{pmatrix} \ddot{\theta}_4 \\ \ddot{\theta}_5 \end{pmatrix} = \frac{1}{R_4 R_5 \sin(\theta_4 - \theta_5)} * \begin{pmatrix} R_5 \cos \theta_5 & -R_5 \sin \theta_5 \\ -R_4 \cos \theta_4 & R_4 \sin \theta_4 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -R_2 \sin \theta_2 & -R_2 \cos \theta_2 \\ R_7 \sin \theta_7 & R_7 \sin \theta_7 \\ -R'_3 \sin(\theta_3 + \beta_3) & -R'_3 \cos(\theta_3 + \beta_3) \\ -R'_6 \sin(\theta_6 - \beta_6) & -R'_6 \cos(\theta_6 - \beta_6) \\ -R_2 \cos \theta_2 & R_2 \sin \theta_2 \\ -R'_3 \cos(\theta_3 + \beta_3) & R'_3 \sin(\theta_3 + \beta_3) \\ -R_4 \cos \theta_4 & R_4 \cos \theta_4 \\ -R_5 \cos \theta_5 & R_5 \sin \theta_5 \\ -R'_6 \cos(\theta_6 - \beta_6) & R'_6 \sin(\theta_6 - \beta_6) \\ R_7 \cos \theta_7 & -R_7 \sin \theta_7 \end{pmatrix}^T * \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_7 \\ \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_6 \\ \dot{\theta}_2^2 \\ \dot{\theta}_3^2 \\ \dot{\theta}_4^2 \\ \dot{\theta}_5^2 \\ \dot{\theta}_6^2 \\ \dot{\theta}_7^2 \end{pmatrix}$$

دراسة النقطة D:

شعاع الموضع:



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$\vec{AD} = \begin{pmatrix} R_2 \cos \theta_2 + \dot{R}_3 \cos(\theta_3 + \beta_3) + R_4 \cos \theta_4 \\ R_2 \sin \theta_2 + \dot{R}_3 \sin(\theta_3 + \beta_3) + R_4 \sin \theta_4 \end{pmatrix}$$

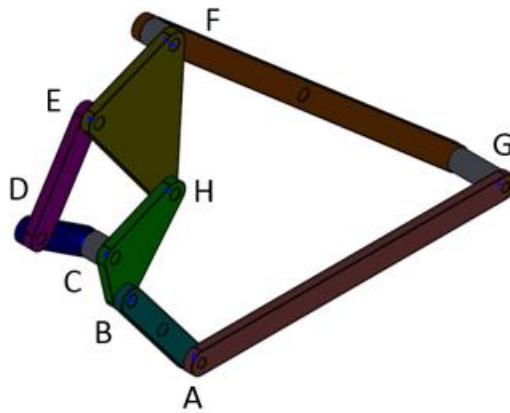
السرعة:

$$\vec{v}_D = \begin{pmatrix} -R_2 \sin \theta_2 & -\dot{R}_3 \sin(\theta_3 + \beta_3) & -R_4 \sin \theta_4 \\ R_2 \cos \theta_2 & \dot{R}_3 \cos(\theta_3 + \beta_3) & R_4 \cos \theta_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\theta}_2 \\ \dot{\theta}_3 \\ \dot{\theta}_4 \end{pmatrix}$$

التسارع:

$$= \begin{pmatrix} -R_2 \sin \theta_2 & -\dot{R}_3 \sin(\theta_3 + \beta_3) & -R_4 \sin \theta_4 & R_2 \cos \theta_2 & \dot{R}_3 \cos(\theta_3 + \beta_3) & R_4 \cos \theta_4 \\ R_2 \cos \theta_2 & \dot{R}_3 \cos(\theta_3 + \beta_3) & R_4 \cos \theta_4 & -R_2 \sin \theta_2 & -\dot{R}_3 \sin(\theta_3 + \beta_3) & -R_4 \sin \theta_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \\ \ddot{\theta}_4 \\ \dot{\theta}_2^2 \\ \dot{\theta}_3^2 \\ \dot{\theta}_4^2 \end{pmatrix}$$

مثال عددي:



الشكل (2) - مخطط للآلة المدروسة

نفرض لدينا آلة سباعية أطوال قضبانها هي كالتالي:



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

AG	AB	BC	BH	HC	CD	DE	EF	EH	FH	EF
150	50	61	40	32	34	46	40	56	60	200
mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm	mm

وقد ثبتنا على النقطة A محرك خطوي له سرعة زاوية ثابتة:

$$\rho = 1 \text{deg/sec}$$

وبفرض أن في اللحظة الابتدائية قيمة θ_2 هي:

$$\theta_2(t = 0) = \theta_{2,0} = -180^\circ$$

أصبح لدينا:

$$\theta_2(t) = \rho t + \theta_{2,0}$$

$$\theta_2(t) = t(\text{sec}) - 180^\circ$$

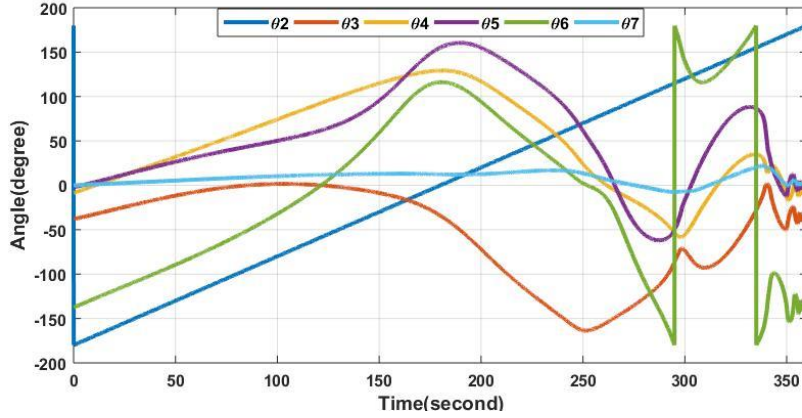
باستخدام برنامج Solid Work أجريت محاكاة للألة السابقة والجدول التالي يبين بعض القيم التي حصلنا عليها من المحاكاة:

$t(\text{sec})$	0	45	90	135	180	225	270	315
$\theta_2(\text{deg})$	-180	-135	-90	-45	0	45	90	135
$\theta_3(\text{deg})$	-38.1	-14.0	0.7	-3.2	-34.2	-123.0	-142.7	-88.7
$\theta_4(\text{deg})$	-8.7	28.0	65.8	103.7	129.3	78.2	-11.3	-2.7
$\theta_5(\text{deg})$	-2.2	23.8	45.7	73.8	155.1	119.7	-21.8	54.5
$\theta_6(\text{deg})$	-137.6	-94.4	-45.1	25.1	116.2	46.7	-54.2	123.1
$\theta_7(\text{deg})$	0	4.8	9.5	12.4	12.4	16.1	2.4	3.1

وبالاستعانة ببرنامج Matlab تم رسم منحنيات تبين تغيرات قيم الانزياح الزاوي بدلالة الزمن وحصلنا على المخطط الآتي:



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية



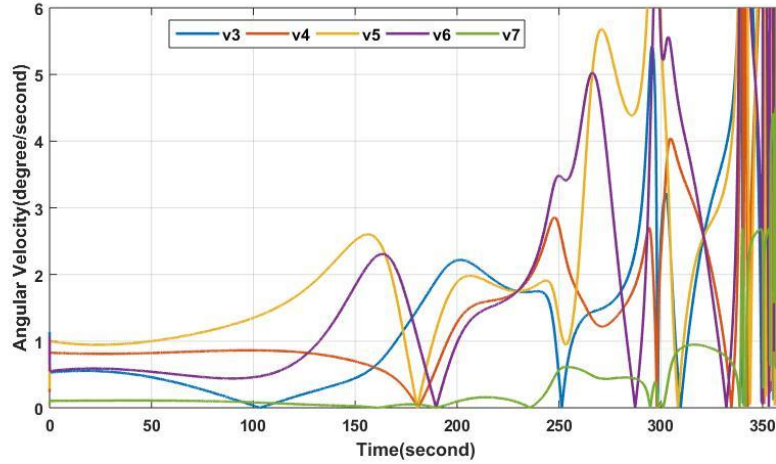
الشكل (3) – مخطط الانزياح بدلالة الزمن
وأيضاً وباستخدام برنامج *Solid Works* حصلنا على بعض قيم السرعة الزاوية بدلالة الزمن وهي موضحة في الجدول الآتي:

$t(sec)$	0	45	90	135	180	225	270	315
$v_3(deg/s)$	1.14	0.48	0.13	0.30	1.45	1.79	1.48	1.44
$v_4(deg/s)$	0.24	0.82	0.86	0.79	0.05	1.67	1.22	3.14
$v_5(deg/s)$	0.29	0.98	1.25	2.04	0.08	1.77	5.66	1.88
$v_6(deg/s)$	1.08	0.55	0.44	1.10	1.11	1.64	4.66	3.61
$v_7(deg/s)$	0.05	0.11	0.09	0.04	0.05	0.12	0.44	0.95

وبالاستعانة ببرنامج *Matlab* تم رسم منحنيات تبين تغيرات قيم السرعة الزاوية بدلالة الزمن وحصلنا على المخطط الآتي:



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية



الشكل (4) - مخطط الانزياح بدلالة الزمن

1. الاستنتاجات والتوصيات:

الاستنتاجات:

تم التوصل من خلال الدراسة الحالية إلى العلاقات الشعاعية والمصفوفات والتي تعبر عن الانزياح الزاوي والسرعة والتسارع الزاوي لمفاصل المنظومة، كما تم التوصل إلى مخططات تعبر عن علاقات الإزاحة والسرعة الزاوية لكل مفصل من مفاصل المنظومة مما يعطي فكرة دقيقة عن حركة هذه المفاصل.

التوصيات:

لازال تطوير الآلة الجديدة وأدائها بحاجة إلى التجربة العملية والتطبيق، ويمكن تصميم برامج حاسوبية تقوم باستنتاج وتوليد مسار الحركة من خلال المصفوفات التي تم الحصول عليها، لذا يوصى باستمرار البحث في الأداء العملي للآلة الجديدة ودراستها عن طريق نظرية الآلات، لاستخدامها لاحقاً في الحياة العملية ووضعها موضع التطبيق.

2. المراجع

1- د. نزيه يوسف، نظرية الآلات 2018، كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية، منشورات جامعة البعث.

2- C.M. Gosselin, 2006 - Kinematics, singularity and workspace of planar 5R symmetrical parallel mechanisms, ***Mechanism and Machine Theory***, vol (41), Pages 145-169.

2- Guowu Wei & Jian S. Dai, 2010 - Geometric and kinematic analysis of a seven-bar three-fixed-pivoted compound-joint mechanism, ***Mechanism and Machine Theory***, Vol (45), 170-184.

3- S.H. Tong, 2006- Design of high-stiffness five-bar and seven-bar linkage structures by using the concept of orthogonal paths, *Transaction of the ASME, ***Journal of Mechanical Design****, 128 P(430-435).



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

- 4- Guowu Wei & Jian S. Dai, 2010 - Geometric and kinematic analysis of a seven-bar three-fixed-pivoted compound-joint mechanism, *Mechanism and Machine Theory*, Vol (45), 170-184.
- 5- Bhartendu Seth and Sesha Sai Vaddi, 2003- Programmable function generators—1: base five-bar mechanism, *Mechanism and Machine Theory*, 38 (4) 321-330.
- 6- Sesha Sai Vaddi and Bhartendu Seth, 2003- Programmable function generators — 2: seven-bar translatory-out mechanism, *Mechanism and Machine Theory*, 38 (4) 331-343.
- 7- J. Herman, V. De Straete and J. De Schutter, 1996- Hybrid cam mechanism, *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, 1 (4) P(284-289).
- 8- Ali Kirecci and L. Canan Dulger, 2000- A study on a hybrid actuator, *Mechanism and Machine Theory*, 35 (8) (2000) 1141-1149.
- 9- L. C. Dulger, Ali Kirecci and M. Topalbekiroglu, 2003- Modeling and simulation of a hybrid actuator, *Mechanism and Machine Theory*, 38 (5) 395-407.

SEIDRA model for epidemics: study and numerical solutions using Mathematica

Dr. Imad Fattash

FMEE-Damascus University

fattash.i@list.ru

Abstract

We present in this paper : study , development and implementation of the deterministic models : SI , SIR , SEIRD and new SEIDRA [10] by increasing the number of variables to six (S, E, I, D, R, A) and forming a new ODEs that describes the epidemic with a new mathematical model SEIDRA that monitors the various stages of the epidemic and describes its movement and behavior in the study population, taking into account the above : studying the change in the movement of deaths , disease carriers and infected people as a result of people moving from one area to the study population area .

Introduction

The long history of epidemics in human societies dates back to ancient times.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

Many of them were recorded in prehistoric periods and through various stages, and the matter is not limited to what we have experienced in this period of time related to the emergence of epidemics such as the Covid19 and Ebola ..., but rather that has always been associated with human activity throughout the ages.

The interest of medicine in how to control these epidemics was to mobilize the rest of the sciences to contribute to preserving human lives, and mathematics and mathematicians had an important role in that. Daniel Bernoulli (17th century) had the first serious participation in the work on characterizing such cases, and many mathematicians followed him later, up to the present day, where many statistical, probabilistic, and analytical models were established, and many computer models were built to deal with these issues in service of the civilized path in evolution, progress and the preservation of human life. This has emerged during the Covid19 pandemic through the great works and researches that accompanied the new epidemic. The spread of an epidemic disease depends on both the amount of contact between individuals and the possibility of an infected person transmitting the disease to another person.

I- The exponential model (geometric s.):

Let $I(t)$ the number of infected at the moment (day) t :

$$I(t) = I(0) r^t \quad (1)$$

Where $I(0)$ represented as initial value. The number $I(t)$ will increase and approaches infinity when $r > 1$, decrease when $r < 1$ and $I(t)$ approaches zero and remains constant when $r = 1$.

II- The simplest of deterministic models (SI):

In this work , the numerical approaches to the solution for SEIDRA model were also clarified[10] , and the work of the new modified model SEIDRA was tested by doing the solution using a Mathematica software and using the same system in order to obtain the solution curves .

The simplest of deterministic models, discussed by Bailey (1957) and Daley and Gani (1999), contains population members in one of two states, susceptible and infective only.

Let:

$$I' = \beta f(I) \quad (2)$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

Be the differential equation a reasonable tool to achieve the goal, through which it monitors the speed of the spread of the epidemic, growth, and its end at period of time T . The interval $[0, T]$ divides to n equal parts $\Delta t = T/n$. Let consider the following:

$I(t)$: It expresses the number of infected people at the moment of time.

$S(t)$: represents the number of susceptible at the moment from the population, and they are related by:

$$I(t) + S(t) = N \quad (3)$$

N : The number of populations.

$S(t)$: It can be written in the

$$S(t) = N - I(t).$$

These considerations lead to the following differential equation:

$$I' = \beta I(t)[N - I(t)] \quad (4)$$

The solution of (4) is:

$$I(t) = \frac{N}{Ne^{-\beta Nt} + 1} \quad (5).$$

Approximate methods offer other possibilities of solution such as Euler's method, modified Euler's method, and others.

The initial value problem (I.V.P) can also be formulated as follows:

Finding a solution to the differential equation $I' = \beta I(t)[N - I(t)]$ over the interval $[0, T]$ with the initial condition $I(0) = I_0$, and the Euler iterative formula for numerical solution:

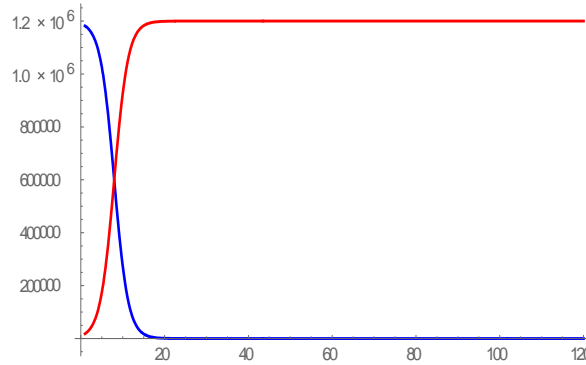
$$\begin{cases} I_0 = I(0) \\ I_{i+1} = I_i + \Delta t \beta I_i (N - I_i) \\ i = 0, 1, \dots, n-1 \\ \Delta t = T/n, I(0) = I_0 \\ t \in [0, T] \end{cases} \quad (6)$$

Using **Mathematica** for the following data:

Figure (1) shows the implementation results through the three curves (**S, I**)



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية



Fig(1):Curves of SI model

III- Advanced differential model (SIR model)

This model was proposed in 1927 by KerMack and Mc Kendrick, and has been used as a basic model for epidemics. The SIR model consists of the following nonlinear system of ordinary differential equations (ODEs)

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = -\beta S(t)I(t) \\ \frac{dI}{dt} = \beta S(t)I(t) - \nu I(t) \\ \frac{dR}{dt} = \nu I(t) \end{cases} \quad (7)$$

where:

$$S(t) + I(t) + R(t) = N \quad (8)$$

The new addition among the members of the community is N to calculate the number of those who have recovered $R(t)$ after infection, as for $S(t)$ the number of those exposed to infection and $I(t)$ the number of infecte-dpeople.

Since $R(t)$ can be written:

$$R(t) = N - S(t) - I(t),$$

So the ODEs consist of the first and second equations.



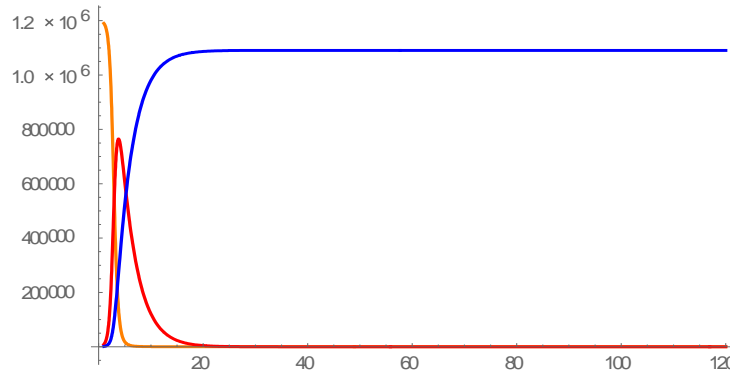
المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

There are various numerical methods for solving ODEs (7) then comparing with actual solutions. We can approximate solution by iterative Euler formulas:

$$\begin{cases} S_{i+1} = S_i - \beta S_i I_i \Delta t \\ I_{i+1} = I_i + (\beta S_i I_i - \nu I_i) \Delta t \\ R_{i+1} = R_i + \nu I_i \Delta t \\ i = 1, 2, \dots, n - 1 \\ \Delta t = T/n, S(0) = S_0, \\ R(0) = R_0, I(0) = I_0, \\ t \in [0, T] \end{cases} \quad (9)$$

Using **Mathematica** for the following data:

Figure (2) shows the implementation results through the three curves(S,I,R)



Fig(2):Curves of SIR model

IV-The SEIDRA model:

We present in this paper the development of the deterministic models: SIR and SEIRD by increasing the number of variables to six (S, E, I, D, R, A) and forming a new ODEs that describes the epidemic with a new mathematical model SEIDRA that monitors the various stages of the epidemic and describes its movement and behavior in the study population, taking into account the above: Studying the change in the movement of deaths, disease carriers and infected people as a result of people moving from one area to the study population area.

General description of the proposed model:



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

In this model, we added a new variable related to the number of people coming (Arrivals) to the study area from other region θ (or regions), and they are from the three categories: S, E, I .

The SEIDRA epidemic model belongs to the class of compartmental models, the essence of which is to divide the population into several groups.

In this model, we consider that the number of people in the study population is divided into six groups:

$$S(t) + E(t) + I(t) + D(t) + R(t) + A(t) = N \quad (10)$$

assuming that N is constant and each of these variables in (10) defined as follows:

$S(t)$: The number of susceptible people at the moment of time t ,

$E(t)$: The number of exposed people at the moment of time t ,

$I(t)$: The number of infected people at the moment of time t ,

$D(t)$: The number of people who died as a result of the epidemic at the moment of time t ,

$R(t)$: The number of people who have recovered from infection as a result of the epidemic at the moment of time t ,

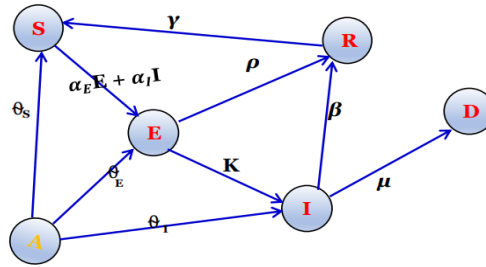
$A(t)$: The number of arrivals from other region θ (or regions) to the study area at the moment of time t , and they are from the three categories S, E, I .



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

Model scheme:

Through our study of the links and influences between the six variables that make up the study population. We describe in Fig. (1) the SEIDRA model as a Graph $G = (V, E)$ where $V = \{S, E, I, D, R, A\}$ and $E \subseteq V^2$:



Fig(3): Scheme of SEIDRA model.

The model variables and the correlations between them are expressed through an ODEs consisting of six non-linear ordinary differential equations, which is a development of the models: SIR [1] and SEIRD [8,10] which were successfully used in the study of the covid19 epidemic.

The equations of proposed model as follows:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS}{dt} = -\frac{(\alpha_I I + \alpha_E E)S}{N} + \gamma R + \theta_S S \\ \frac{dE}{dt} = \frac{(\alpha_I I + \alpha_E E)S}{N} - kE - \rho E + \theta_E E \\ \frac{dI}{dt} = kE - \beta I - \mu I + \theta_I I \\ \frac{dD}{dt} = \mu I \\ \frac{dR}{dt} = \beta I + \rho E - \gamma R \\ \frac{dA}{dt} = -(\theta_I I + \theta_E E + \theta_S S) \end{array} \right. \quad (11)$$

It is easy to check that:



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$\frac{d}{dt}[S(t) + E(t) + I(t) + D(t) + R(t) + A(t)] = 0, \quad (12)$$

$$N = \text{const.}$$

Also make summation of all terms in right side of (11) to get the same result.

The existence and uniqueness theorems for solution to (11) are satisfied.

Since $D(t)$ can be written:

$$D(t) = N - [S(t) + E(t) + I(t) + R(t) + A(t)] \quad (13)$$

so the ODEs can be consist of five equations.

The coefficients in (11):

$$\theta_I, \theta_E, \theta_S, \alpha_I, \alpha_E, \gamma, k, \rho, \mu, \beta$$

are parameters of SEIDRA model are defined in Table (1).

n	parameter	description
1	θ_I	Infection rate in θ
2	θ_E	Exposed rate in θ
3	θ_S	suspected rate in θ
4	α_I	Parameter of infection between infected and susceptible populations, which is related to the contagiousness of the and social factors
5	α_E	Parameter of infection between exposed and susceptible populations



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

6	γ	Re-infection rate.
7	k	Frequency of symptoms in open cases leading to a transition from an asymptomatic to an infected population
8	ρ	Rate of cases that are identified but recover without any symptoms
9	μ	Death rate of infected cases
10	β	Recovery rate of infected case

Table (1): parameters of SEIDRA model

V- Solution approaches:

Simulating the behavior of the virus spread by differential equations' systems (11) is carried out by the numerical Euler method with given initial values and a step of 1 day in the considered period $[0, T]$. As the initial conditions vector, we use the following data:

Let $X(0) = X_0$ and:

$$X_0 = (S_0, E_0, I_0, D_0, R_0, A_0)^t$$

where:

$$S(0) = S_0, \quad E(0) = E_0, \quad I(0) =$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$= I_0, D(0) = D_0, R(0) = R_0, A(0) = A_0$$

The interval $I = [0, T]$ divides into n sub-intervals with equal's length $\Delta t = T/n$

Let:

$$\begin{cases} S'(t) = f_S(S, E, I, R) = f_S(X) \\ E'(t) = f_E(S, E, I) = f_E(X) \\ I'(t) = f_I(E, I) = f_I(X) \\ D'(t) = f_D(I) = f_D(X) \\ R'(t) = f_R(E, I, R) = f_R(X) \\ A'(t) = f_A(S, E, I) = f_A(X) \end{cases} \quad (14)$$

be six differential equations of system (11) in six unknowns

$$X(t) =$$

$$= [S(t), E(t), I(t), D(t), R(t), A(t)]^t$$

Define the vector-valued function:

$$F(X) = [f_S, f_E, f_I, f_D, f_R, f_A]^t$$

and denote the system (11) by

$$X'(t) = F(X) \quad (15)$$

where:

$$X'(t) = DX(t) =$$

$$= [S'(t), E'(t), I'(t), D'(t), R'(t), A'(t)]^t$$

We can rewrite (11) by the vector (matrix) equation:

$$DX(t) = F(X) \quad (16)$$

Using iterative Euler formulas, we have:



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$\begin{cases} S_{i+1} = S_i + \Delta t \cdot f_S(X_i) \\ E_{i+1} = E_i + \Delta t \cdot f_E(X_i) \\ I_{i+1} = I_i + \Delta t \cdot f_I(X_i) \\ D_{i+1} = D_i + \Delta t \cdot f_D(X_i) \\ R_{i+1} = R_i + \Delta t \cdot f_R(X_i) \\ A_{i+1} = A_i + \Delta t \cdot f_A(X_i) \end{cases} \quad (17)$$
$$i = 1, 2, \dots, n - 1$$

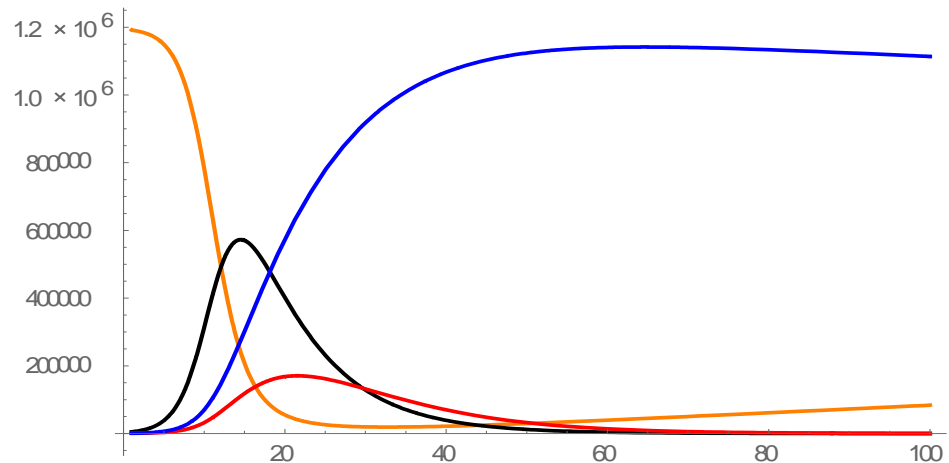
Or rewrite:

$$X_{i+1} = X_i + \Delta t F(X_i) \quad (18)$$

with initial vector value.

Using **Mathematica** for the following data:

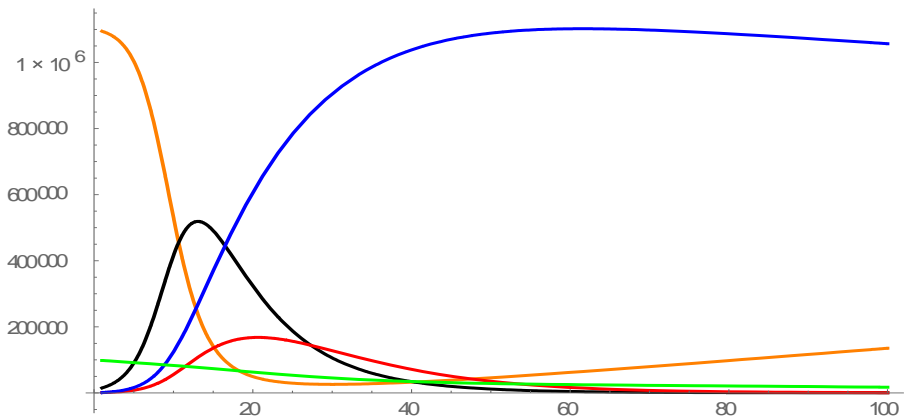
Figure (4) shows the implementation results through the curves of model(S,E,I,R,D) Figure (5) shows the implementation results through curves of model(S,E,I,D,R,A) and



Fig(4):Curves of SEIRD model



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية



Fig(5):Curves of SEIDRA model:

The analytical solution is not easy to reach for (11), even though its conditions are satisfied. So we go to use numerical approximation methods as: Runge_Kutta method or Euler's iterative method to solving the initial-value problems of differential equations. This methods can be used to construct high order accurate numerical method by functions' self without needing the high order derivatives of functions.

Can also be used software systems as MATLAB, Maple and Mathcad to give the solution for (11) depending on the various numerical methods.

References

Imad Fattash.(2023). Relationship between medicine and mathematics: The Control of Epidemics. CMA: Alfurat Univ. ,13-14 march 2023, pp.17.

Sharmistha Mishra.(2011).The ABC of terms used in mathematical models of infectious diseases. J Epidemiol Community Health, 2011, pp.65-87.

Ross-Beckley.(2013).Modeling epidemics with differential equations. Tennessee State University, 2 Philander Smith College.21 June 2013

Anderson Luiz Pena da Costa.(2021). Mathematical Modeling of the Infectious Diseases: Key Concepts and Applications. J Infect Dis Epidemiol 2,2021, pp. 7-209.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

Constantinos I.Siettos Lucia Russo.(2013). Mathematical modeling of infectious disease dynamics. Virulence 4:4, Landes Bioscience,15 May 2013, pp.295-306.

Howard Weiss .(2013).The SIR model and the Foundations of Public Health. Volume 2013, tribal no. 3, pp.17-20.

Anis Elaoud and others.(2021).A SIR-Poisson Model for COVID-19: Evolution and Transmission. Arabian Journal for Science and Engineering, 46,2021, pp.93-102.

Bektemesov Zh. and others.(2021). On Numerical Modeling of The Inverse Epidemiology Problem. KazYPY, Series: Physics-Mathematics, №3(75),2021, pp.7-14.

Eremeeva N.I. (2020). Building a modification of the SEIRD model of epidemic spread that takes into account the features of COVID-19. Vestnik TvGU, Series: Applied Mathematics , №4, 2020, pp.14-27.

10-Imad Fattash.(2023). New deterministic model for the control of epidemics. ICBME, Damascus Univ. , 2023, pp..(Accepted)

إيجاد الحل لمسألة ديرخليه من أجل معادلة لابلاس في بعض الساحات الخاصة باستخدام التحويلات المحافظة

فاطمة عمر الشمسيني , الدكتور محمد شراباتي الأستاذ المساعد الدكتور باسل العرنوس

ملخص البحث

سندرس في هذا البحث إيجاد الحل لمسألة ديرخليه من أجل معادلة لابلاس في بعض الساحات الخاصة من خلال توظيف التحويلات المحافظة واستخدامها في إيجاد الحل لهذه المسألة على دائرتين غير متحدتا المركز وعلى دوائر منفصلة بالإضافة إلى إيجاد الحل على المضلعات باستخدام تحويلات شواريز كريستوفل لتحويل هذه المسألة إلى مسألة إيجاد الحل على نصف المستوي العلوي

الكلمات المفتاحية. معادلة لابلاس ، التحويل المحافظ ، التابع التوافقي .

Finding the solution to the Dirichlet Problem for the Laplace equation in some special domains using conformal mapping



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

Fatima Omar ALshmsini Dr . Mohamad Charabati ,Ass. Prof. Dr. Basel Al-arnous

Abstract

In this research , we will study finding the solution to the Dirichlet Problem for the Laplace equation by using conformal mapping to unify the solution one two non-concentric circles and on separate circles , in addition to finding the solution on polygons using Schwarz - christoffel transformation to transform this Problem into

Finding the solution on the upper half – plan .

Key Words: Laplace equation, conformal mapping , harmonic function

1 المقدمة

إن مسائل ديناميك الموائع عند صياغتها رياضياً في ظل الفرضيات القائلة بأن التدفقات غير مرئية وغير قابلة للضغط تؤدي إلى معادلة لابلاس

$$\Delta u = 0$$

والتي تخضع لبعض الشروط الحدية . ومن أهم هذه المسائل والتي لها أهمية كبيرة في الرياضيات التطبيقية هي مسألة ديرخلية والتي تعود أصولها إلى دراسة الظواهر الفيزيائية مثل توزيع الحرارة عبر سطح معين , أو حوض التدفق الكهربائي عبر الموصل . أدت هذه الدراسات إلى تطور غير عادي ليس فقط في الفيزياء ولكن أيضاً في الرياضيات . وتعرف مسألة ديرخلية في المستوي بأنها عملية إيجاد تابع توافقي u يحقق معادلة لابلاس ويساوي لتابع مستمر f على الحدود .

$$\Delta u = 0 \quad ; \text{in } R^2$$

$$u(x, y) = f(x, y) \quad ; \text{on } \partial R^2$$

والجدير بالذكر هنا هو استخدام التحويلات المحافظة في إيجاد الحل لهذه المسألة ونفترض أن يكون للقارئ المعرفة الكافية بمعادلة لابلاس ومتسلسلات فورييه وإيجاد الحل لهذه المسألة على ساحات بسيطة كالقرص والحلقة ونصف المستوي العلوي [5] , وبعد التعرف على الحلول المتعلقة بهذه الساحات , سنقوم بتطبيق التحويلات المحافظة عليها لإيجاد الحل على ساحات أكثر تعقيداً من خلال ما سنراه لاحقاً .

2. الهدف من البحث



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

يهدف هذا البحث إلى توظيف التحويلات المحافظة واستخدامها في إيجاد الحل لمسألة ديرخليه من أجل معادلة لابلاس في بعض الساعات الخاصة .

3. المفاهيم الأساسية

تعريف 1 : الساحة هي مجموعة مفتوحة ومحدودة

تعريف 2 : التحويل المحافظ (المتماثل) : [5]

ليكن f تابع تحليلي عقدي عند z_0 بحيث $f'(z_0) \neq 0$, وليكن γ منحني أملس يمر عبر z_0 ويعطى بالتمثيل الوسيطى :

$$z(t) = x(t) + iy(t) \quad ; \quad a \leq t \leq b$$

$$. z(t_0) = z_0$$

ليكن Γ صورة γ وفق التحويل f ويعطى بالشكل :

$$w(t) = f(z(t)) \quad ; \quad a \leq t \leq b$$

نريد أن ندرس تغير الاتجاه للمنحني عند z_0 عند التأثير عليه بالتحويل $w = f(z)$.

لدينا :

$$w'(t) = f'(z(t)) z'(t)$$

:

وبالتالي

$$w'(t_0) = f'(z(t_0)) z'(t_0)$$

لكن $z'(t_0) \neq 0$ لأن المنحني أملس و $f'(z(t_0)) = f'(z_0) \neq 0$, وبالتالي $w'(t_0) \neq 0$. يمكن أن نستنتج أن :

$$\underbrace{\arg(w'(t_0))}_{\text{زاوية شعاع المماس للمنحني } \Gamma \text{ عند } w_0=f(z_0)} = \arg(f'(z_0)) + \underbrace{\arg(z'(t_0))}_{\text{زاوية شعاع المماس للمنحني } \gamma \text{ عند } z_0}$$

نستنتج أن شعاع المماس للمنحني γ عند z_0 قد دار بزاوية قدرها $\arg(f'(z_0))$ (عكس عقارب الساعة) وفق التحويل $w = f(z)$ ونلاحظ أن هذا الدوران لا يتعلق بالمنحني γ ولكن يتعلق فقط بالتحويل f .

❖ إذا كان γ_1 و γ_2 منحنيين أملسين يتقاطعان في z_0 ولتكن α الزاوية بين شعاعي المماس للمنحني في z_0 عندئذ فإن الزاوية بين شعاعي المماس لصورتي المنحنيين Γ_1 و Γ_2 عند $w_0 = f(z_0)$ هي نفسها α .

تعريف 3 :



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

إنَّ التحويل $w = f(z)$ والذي يحافظ على الزاوية والاتجاه بين أي منحنيين أملسين يمران من z_0 يقال أنَّه تحويل محافظ (متماثل) عند z_0 .

مبرهنة 1: إذا كانت D ساحة بسيطة الاتصال وليست كامل المستوي, فإنه يوجد تابع تحليلي وهو تطبيق واحد لواحد من D إلى قرص الوحدة المفتوح.

تمهيدية 2: إذا كان f تحليلي عند z_0 و $f'(z_0) \neq 0$, ثمَّ فإنه يوجد قرص مفتوح D مركزه z_0 , بحيث أن f واحد لواحد على D .

مبرهنة 2: نقول عن التحويل $w = f(z)$ أنه محافظ عند النقطة z_0 إذا كان تحليلي عند z_0 و $f'(z_0) \neq 0$.

مبرهنة 3: إذا كان $w = f(z)$ تحويل محافظ عند كل نقطة من المجال D فإنه محافظ على كامل المجال D .

تعريف 4: التحويل الخطي الكسري (تحويل موبوس) :

هو تحويل من الشكل: $w = f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ حيث: $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ و $ad - bc \neq 0$ لكي لا نحصل على تطبيق ثابت.

سنبين أنه تحويل محافظ: التابع $f(z)$ تحليلي على $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$ و $f'(z) = \frac{ad-bz}{(cz+d)^2} \neq 0$ ومنه $w = f(z)$ تحويل محافظ على $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$.

4. خصائص التحويلات الموبوسية :

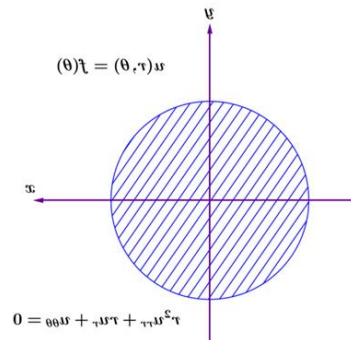
1. التحويل العكسي لتحويل موبوسي هو أيضاً تحويل موبوسي.

2. تركيب تحويلات موبوسية هو أيضاً تحويل موبوسي

الإثبات :

حيث $w_2 = f(z_2) = \frac{ez_2+f}{gz_2+h}$ و $w_1 = f(z_1) = \frac{az_1+b}{cz_1+d}$ و $eh \neq fg$ و $ad \neq bc$ ومنه

$$w_2(w_1) = \frac{e(az_1+b) + f(cz_1+d)}{g(az_1+b) + h(cz_1+d)} = \frac{(ea+fc)z_1 + (eb+fd)}{(ga+hc)z_1 + (gb+hd)}$$





المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

بحيث

$$(ea + fc)(gb + hd) \neq (eb + fd)(ga + hc)$$

5 مسألة ديرخليه على قرص دائري : [4]

لتكن لدينا مسألة القيمة الحدية التالية :

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0 \quad (1)$$

$$u(\rho, \theta) = f(\theta)$$

$$u(r, -\pi) = u(r, \pi)$$

$$u_{\theta}(r, -\pi) = u_{\theta}(r, \pi)$$

حيث $f(\theta)$ مستمر قطعياً .

إن الحل لهذه المسألة يعطى بالعلاقة :

$$u(r, \theta) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) \left[\frac{\rho^2 - r^2}{r^2 + \rho^2 - 2\rho r \cos(\theta - \phi)} \right] d\phi$$

6. حل مسألة ديرخليه على نصف المستوى العلوي : [3]

مبرهنة :

إذا كان f تابع مستمر قطعياً ومحدود على $-\infty < x < +\infty$, فإن حل مسألة ديرخليه على نصف المستوى العلوي

$y > 0$ مع الشروط

$$u(x, y) = f(x)$$

عند جميع النقاط المستمرة للتابع f يعطى بالعلاقة

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{y^2 + (x - t)^2} dt$$

7. حل معادلة لابلاس على مجالات معقدة باستخدام التحويلات المحافظة : [5]



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

أحد تطبيقات التحويلات المحافظة هو إيجاد الحلول $h(u, v)$ لمعادلة لابلاس على مجالات معقدة من الحلول $u(x, y)$ على مجالات بسيطة وذلك من خلال تحديد $h(u, v) = u(x, y)$ والنقطة (u, v) متعلقة بـ (x, y) من خلال التحويل المحافظ f بحيث

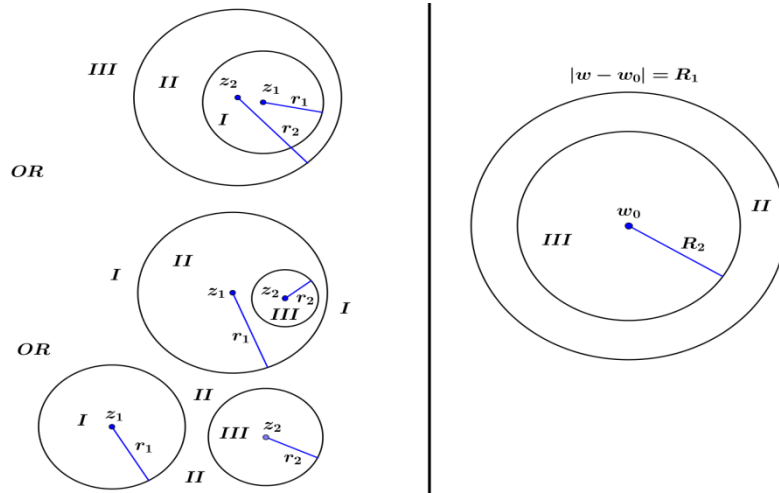
$$u + iv = f(x + iy) \quad \text{أو} \quad w = f(z)$$

1.7 حل مسألة ديرخليه على دائرتين ليستا متحدتا المركز : [2]

نقوم أولاً بإيجاد التحويل الذي ينقل الدائرتين غير متحدتا المركز إلى دائرتين متحدتا المركز (حلقة) ثم نوجد حل مسألة ديرخليه على حلقة .

❖ إن التحويل الذي ينقل دائرتين غير متحدتا المركز إلى دائرتين متحدتا المركز يعطى بالعلاقة : [2]

$$w - w_0 = t \frac{R_1}{r_1} e^{i\theta} \frac{d(z - z_1) - s(z_2 - z_1)}{d(z - z_1) - t(z_2 - z_1)}$$



θ حقيقي , بحيث s و t هما حلول المعادلتين

$$\begin{cases} st = 1 \\ (d - s)(d - t) = r_2^2 \end{cases}$$

و

$$d = |z_2 - z_1| > 0$$

نعطي $R_2 > 0$, $w_0, R_1 > 0$ و $r_2 > 0$, $z_1, z_2, r_1 > 0$ لكن



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{r_2}{r_1} \left| \frac{t}{d-t} \right|$$

بحالة خاصة : [1]

و $z_1 = 0$, $w_0 = 0$, $R_1 = r_1$ و $d = |z_2 - z_1| = |z_2|$ و s , t هما حلول المعادلتين

$$\begin{cases} st = 1 \\ (d-s)(d-t) = r_2^2 \end{cases}$$

ومنه فإن التحويل يعطى بالعلاقة

$$w = t \frac{dz - sz_2}{dz - sz_2}$$

مثال 1 :

لتكن D الساحة بين الدائرتين $|z| = 1$ و $|z - 4/5| = 4/5$ إذا كان f يحقق معادلة لابلاس على D , $f = 0$ على $|z| = 1$ و $f = 1$ على $|z - 4/5| = 4/5$ والمطلوب إيجاد التابع f باستخدام التحويل الموبيوسي .

الحل :

نقوم أولاً بإيجاد التحويل الموبيوسي بحيث أن التحويل يعطى بالعلاقة

$$w = t \frac{dz - sz_2}{dz - tz_2}$$

حيث $z_2 = \frac{4}{5}$, $d = |z_2| = \frac{4}{5}$ لنوجد s , t جذرا المعادلتين

$$\begin{cases} st = 1 \\ \left(\frac{4}{5} - s\right) \left(\frac{4}{5} - t\right) = \frac{16}{25} \end{cases}$$

وبحل جملة المعادلتين نجد أن :

في حال $s = 4$ فإن $t = \frac{1}{4}$ و في حال $s = -1$ فإن $t = -1$

ومنه فإن التحويل المطلوب إما

$$w = (z - 4)/(4z - 1)$$

أو



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$w = (1 - z)/(z - 1)$$

في المستوي w الحل لمعادلة لابلاس مع القيمة 0 على $|w| = 1$ والقيمة 1 على $|w| = \frac{4}{9}$ يكون $f(u, v)$ وهو يعتمد فقط على نصف القطر $R = \sqrt{u^2 + v^2}$ ومنه

$$0 = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = \frac{1}{R} \frac{d}{dR} R \frac{df}{dR}$$

الحل العام هو $f = c_1 + c_2 \ln R$ وبتطبيق الشروط الحدية نحصل على $u(x, y)$

في المستوي w الحل لمعادلة لابلاس مع القيمة 0 على $|w| = 1$ والقيمة 1 على $|w| = \frac{4}{9}$ يكون $f(u, v)$ وهو يعتمد فقط على نصف القطر $R = \sqrt{u^2 + v^2}$ ومنه

$$0 = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} = \frac{1}{R} \frac{d}{dR} R \frac{df}{dR}$$

الحل العام هو $f = c_1 + c_2 \ln R$ وبتطبيق الشروط الحدية نحصل على $f(x, y)$

$$f = \frac{1}{\ln \frac{4}{9}} \ln R = \frac{1}{2 \ln \frac{2}{3}} \ln(u^2 + v^2)$$

ولإيجاد الحل في المستوي Z , من تعريف التحويل لدينا

$$u + iv = w = \frac{z - 4}{4z - 1} = \frac{x - 4 + iy}{4x - 1 + 4iy} = \frac{(x - 4 + iy)(4x - 1 - 4iy)}{(4x - 1)^2 + 16y^2}$$

$$\Rightarrow u = \frac{4x^2 + 4y^2 - 17x + 4}{(4x - 1)^2 + 16y^2}, \quad v = \frac{15y}{(4x - 1)^2 + 16y^2}$$

أخيراً, فإن الحل هو

$$f(x, y) = \frac{1}{2 \ln \frac{2}{3}} \ln(u^2 + v^2)$$

$$= \frac{1}{2 \ln \frac{2}{3}} \ln \frac{(4x^2 + 4y^2 - 17x + 4)^2 - (15)^2 y^2}{((4x - 1)^2 + 16y^2)^2}$$

2.7 حل معادلة لابلاس على دوائر منفصلة : [5]



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

لنجد الحل $u(x, y)$ لمعادلة لابلاس $u_{xx} + u_{yy} = 0$ على المجال z , لنفرض أن الشروط الحدية على المستوي z تعطى بـ

$$f_1(z_1 + R_1 e^{i\alpha})$$

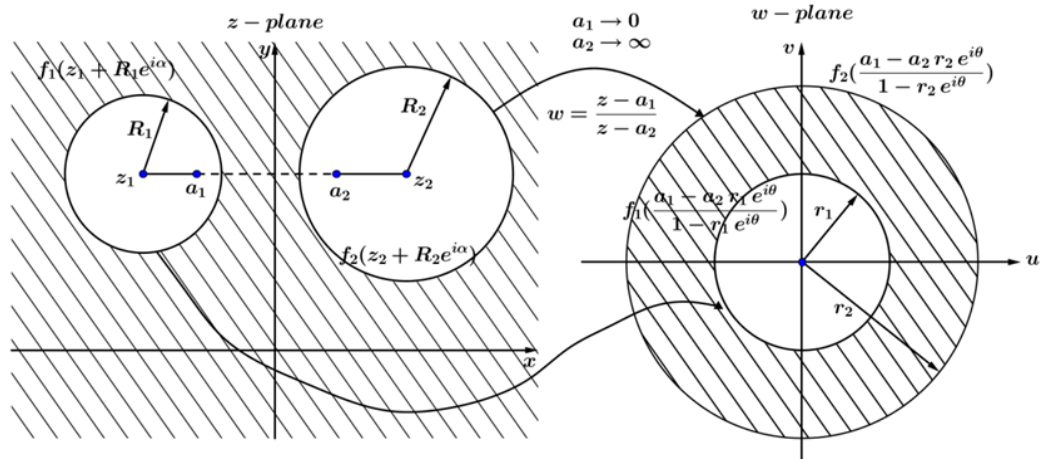
على الدائرة $c_1(z_1, R_1)$.

$$f_2(z_2 + R_2 e^{i\alpha})$$

و

على الدائرة $c_2(z_2, R_2)$.

من خلال خواص التحويلات المحافظة يمكننا أولاً إيجاد الحل $\psi(r, \theta)$ لمعادلة لابلاس $r^2 \psi_{rr} + r \psi_r + \psi_{\theta\theta} = 0$ على المجال w ومن ثم إيجاد الحل على المجال الأصلي عن طريق تغيير المتحولات.



ببساطة, نحدد $c = 1$ في تابع التحويل, ومنه

$$w = \frac{z - a_1}{z - a_2}$$

حيث

$$\begin{cases} a_1 = z_1 + \frac{R_1^2}{\bar{a}_1 + \bar{z}_1} \\ a_2 = z_2 + \frac{R_2^2}{\bar{a}_1 + \bar{z}_2} \end{cases}$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$\begin{cases} a_1 = \frac{(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)(z_1 + z_2) + R_2^2 - R_1^2 + \sqrt{(R_2^2 - R_1^2)^2 + |\bar{z}_1 - \bar{z}_2|^2 [|\bar{z}_1 - \bar{z}_2| - 2(R_2^2 + R_1^2)]}}{2(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)} \\ a_2 = \frac{(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)(z_1 + z_2) + R_2^2 - R_1^2 - \sqrt{(R_2^2 - R_1^2)^2 + |\bar{z}_1 - \bar{z}_2|^2 [|\bar{z}_1 - \bar{z}_2| - 2(R_2^2 + R_1^2)]}}{2(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)} \end{cases}$$

لإيجاد نصف القطر للدائرتين $c(0, r_1)$ و $c(0, r_2)$ على المجال w من خلال تابع التحويل :

$$r_1 = \left| \frac{z_1 + R_1 - a_1}{z_1 + R_1 - a_2} \right|$$

و

$$r_2 = \left| \frac{z_2 + R_2 - a_1}{z_2 + R_2 - a_2} \right|$$

نحتاج لإيجاد الشروط الحدية المقابلة على المجال w وذلك بوضع $z = z_1 + R_1 e^{i\alpha}$ و $w = r_1 e^{i\theta}$ لدينا

$$w = \frac{z - a_1}{z - a_2} \Rightarrow r_1 e^{i\theta} = \frac{z_1 + R_1 e^{i\alpha} - a_1}{z_1 + R_1 e^{i\alpha} - a_2}$$

$$\Rightarrow z_1 + R_1 e^{i\alpha} = \frac{a_1 - a_2 r_1 e^{i\theta}}{1 - r_1 e^{i\theta}}$$

بشكل مشابه , بوضع $z = z_2 + R_2 e^{i\alpha}$ و $w = r_2 e^{i\theta}$ لدينا

$$z_2 + R_2 e^{i\alpha} = \frac{a_1 - a_2 r_2 e^{i\theta}}{1 - r_2 e^{i\theta}}$$

لذلك , الشروط الحدية على الدوائر $c(0, r_1)$ و $c(0, r_2)$ على المجال w هي :

$$f_1(z_1 + R_1 e^{i\alpha}) = f_1 \left(\frac{a_1 - a_2 r_1 e^{i\theta}}{1 - r_1 e^{i\theta}} \right)$$

$$f_2(z_2 + R_2 e^{i\alpha}) = f_2 \left(\frac{a_1 - a_2 r_2 e^{i\theta}}{1 - r_2 e^{i\theta}} \right)$$

الآن , سنقوم فقط بإيجاد الحل لمعادلة لابلاس على المجال w



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$\begin{cases} r^2\psi_{rr} + r\psi_r + \psi_{\theta\theta} = 0 \\ \psi(r_1, \theta) = f_1\left(\frac{a_1 - a_2r_1e^{i\theta}}{1 - r_1e^{i\theta}}\right) \\ \psi(r_1, \theta) = f_2\left(\frac{a_1 - a_2r_2e^{i\theta}}{1 - r_2e^{i\theta}}\right) \\ \psi(r, -\pi) = \psi(r, \pi) \\ \psi'(r, -\pi) = \psi'(r, \pi) \end{cases}$$

من خلال صيغة الحل على حلقة , نجد الحل

$$\begin{aligned} \psi(r, \theta) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_1\left(\frac{a_1 - a_2r_1e^{i\theta}}{1 - r_1e^{i\theta}}\right) \left(\frac{\ln \frac{r}{r_2}}{\ln \frac{r_1}{r_2}} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(r^n - r_2^{2n}r^{-n})}{(r_1^n - r_2^{2n}r_1^{-n})} \cos(n(\theta - \phi))\right) d\phi \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_2\left(\frac{a_1 - a_2r_2e^{i\theta}}{1 - r_2e^{i\theta}}\right) \left(\frac{\ln \frac{r}{r_1}}{\ln \frac{r_2}{r_1}} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(r^n - r_1^{2n}r^{-n})}{(r_2^n - r_1^{2n}r_2^{-n})} \cos(n(\theta - \phi))\right) d\phi \quad \dots (*) \end{aligned}$$

نعلم أنّ :

$$r = |w| = \left| \frac{z - a_1}{z - a_2} \right| = \left| \frac{x + iy - a_1}{x + iy - a_2} \right|$$

$$\theta = \arg(w) = \arg\left(\frac{z - a_1}{z - a_2}\right) = \arg\left(\frac{x + iy - a_1}{x + iy - a_2}\right)$$

ليكن $t = \frac{a_1 - a_2r_2e^{i\phi}}{1 - r_2e^{i\phi}}$, ثم $\phi = -i \log \frac{a_1 - t}{a_2r_1 - r_1t}$ و $d\phi = \frac{i(a_2 - a_1)}{(a_1 - t)(a_2 - t)} dt$. من ثمّ , نستطيع إيجاد الحل بشكل واضح من خلال التعويض في (*) :



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$\begin{aligned}\phi(z(x, y)) = & \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{a_1+a_2r_2}{1+r_2}}^{\frac{a_1-a_2r_2}{1-r_2}} \frac{i(a_2 - a_1)}{(a_1 - t)(a_2 - t)} f_1(t) \left(\frac{\ln \left| \frac{z - a_1}{z - a_2} \right| - \ln r_2}{\ln r_1 - \ln r_2} \right. \\ & + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\left| \frac{z - a_1}{z - a_2} \right|^n - r_1^{2n} \left| \frac{z - a_2}{z - a_1} \right|^n \right)}{(r_1^n - r_2^{2n} r_1^{-n})} \cos n \left(\arg \frac{z - a_1}{z - a_2} \right. \\ & \left. \left. + \frac{i(a_2 - a_1)}{(a_2 r_1 - r_1 t)} \right) dt \right) \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{a_1+a_2r_2}{1+r_2}}^{\frac{a_1-a_2r_2}{1-r_2}} \frac{i(a_2 - a_1)}{(a_1 - t)(a_2 - t)} f_2(t) \left(\frac{\ln \left| \frac{z - a_1}{z - a_2} \right| - \ln r_1}{\ln r_2 - \ln r_1} \right. \\ & + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\left| \frac{z - a_1}{z - a_2} \right|^n - r_2^{2n} \left| \frac{z - a_2}{z - a_1} \right|^n \right)}{(r_2^n - r_1^{2n} r_2^{-n})} \cos n \left(\arg \frac{z - a_1}{z - a_2} \right. \\ & \left. \left. + \frac{i(a_2 - a_1)}{a_2 r_2 - r_2 t} \right) dt \right)\end{aligned}$$

مثال 2 :

للسهولة نفرض أن $a_1 = 0, a_2 = 1$ و $z_1 = -1, z_2 = 2$ و $r_1 = 1, r_2 = 2$ و $f_2(x) = 1$ و $f_1(x) = 0$

ومن المعلوم أن الحل يعطى بالعلاقة :



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$\phi(z(x, y)) = \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{a_1+a_2r_2}{1+r_2}}^{\frac{a_1-a_2r_2}{1-r_2}} \frac{i(a_2 - a_1)}{(a_1 - t)(a_2 - t)} f_2(t) \left(\frac{\ln \left| \frac{z - a_1}{z - a_2} \right| - \ln r_1}{\ln r_2 - \ln r_1} \right. \\ \left. + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\left| \frac{z - a_1}{z - a_2} \right|^n - r_2^{2n} \left| \frac{z - a_2}{z - a_1} \right|^n \right)}{(r_2^n - r_1^{2n} r_2^{-n})} \operatorname{cosn} \left(\arg \frac{z - a_1}{z - a_2} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{i(a_2 - a_1)}{a_2 r_2 - r_2 t} \right) dt \right)$$

$$\phi(z(x, y)) = \frac{1}{2\pi} \int_{\frac{2}{3}}^2 \frac{i}{-t(1-t)} \left(\frac{\ln \left| \frac{z}{z-1} \right|}{\ln 2} 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\left| \frac{z}{z-1} \right|^n - 2^{2n} \left| \frac{z-1}{z} \right|^n \right)}{(2^n - 2^{-n})} \operatorname{cosn} \left(\arg \frac{z}{z-1} + \frac{i}{-2t} \right) dt \right) \\ = \frac{-i \ln \left| \frac{z}{z-1} \right|}{2\pi \ln 2} \int_{\frac{2}{3}}^2 \frac{dt}{t(1-t)} + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{2}{3}}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^{2n} - 2^{2n} |z-1|^{2n}}{|z|^n |z-1|^n (2^n - 2^{-n})} \operatorname{cosn} \left(\arg \frac{z}{z-1} + \frac{i}{-2t} \right) dt \\ = \frac{-i \ln \left| \frac{z}{z-1} \right|}{2\pi \ln 2} \int_{\frac{2}{3}}^2 \left(\frac{-1}{t} + \frac{1}{t-1} \right) dt + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{2}{3}}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^{2n} - 2^{2n} |z-1|^{2n}}{|z|^n |z-1|^n (2^n - 2^{-n})} \operatorname{cosn} \left(\arg \frac{z}{z-1} + \frac{i}{-2t} \right) dt \\ = \frac{-i \ln \left| \frac{z}{z-1} \right|}{2\pi \ln 2} \left| -\ln t + \ln(t-1) \right|_{\frac{2}{3}}^2 + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{2}{3}}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^{2n} - 2^{2n} |z-1|^{2n}}{|z|^n |z-1|^n (2^n - 2^{-n})} \operatorname{cosn} \left(\arg \frac{z}{z-1} + \frac{i}{-2t} \right) dt \\ = \frac{-i \ln \left| \frac{z}{z-1} \right|}{2\pi \ln 2} \left((-\ln 2 + \ln 1) - \left(-\ln \frac{2}{3} + \ln \frac{1}{3} \right) \right) \\ \quad + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{2}{3}}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^{2n} - 2^{2n} |z-1|^{2n}}{|z|^n |z-1|^n (2^n - 2^{-n})} \operatorname{cosn} \left(\arg \frac{z}{z-1} + \frac{i}{-2t} \right) dt \\ = \frac{-i \ln \left| \frac{z}{z-1} \right|}{2\pi \ln 2} \left(-2 \ln 3 + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{2}{3}}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^{2n} - 2^{2n} |z-1|^{2n}}{|z|^n |z-1|^n (2^n - 2^{-n})} \operatorname{cosn} \left(\arg \frac{z}{z-1} + \frac{i}{-2t} \right) dt \right)$$

ونلاحظ بفك أول ثلاث حدود من مجموع السلسلة :

$$\int_{\frac{2}{3}}^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|z|^{2n} - 2^{2n} |z-1|^{2n}}{|z|^n |z-1|^n (2^n - 2^{-n})} \operatorname{cosn} \left(\arg \frac{z}{z-1} + \frac{i}{-2t} \right) dt$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$= \int_{\frac{2}{3}}^2 \frac{|z|^2 - 4|z-1|^2}{|z|^1|z-1|^1 \left(4 - \frac{1}{2}\right)} \cos\left(\arg \frac{z}{z-1} + \frac{i}{-2t}\right) dt + \int_{\frac{2}{3}}^2 \frac{|z|^4 - 16|z-1|^4}{|z|^2|z-1|^2 \left(16 - \frac{1}{4}\right)} \cos 2\left(\arg \frac{z}{z-1} + \frac{i}{-2t}\right) dt + \frac{i}{-2t} dt + \int_{\frac{2}{3}}^2 \frac{|z|^6 - 64|z-1|^6}{|z|^3|z-1|^3 \left(64 - \frac{1}{8}\right)} \cos 3\left(\arg \frac{z}{z-1} + \frac{i}{-2t}\right) dt$$

ونعلم أن :

$$\cos(a + ib) = \cos a \cos ib - \sin a \sin ib$$

وبالتالي فإن قيمة هذا التكامل بشكل تقريبي :

$$\begin{aligned} &= \frac{i \ln \left| \frac{z}{z-1} \right|}{\pi \ln 2} (\ln 3) + \frac{-i \ln \left| \frac{z}{z-1} \right|}{2\pi^2 \ln 2} \frac{|z|^2 - 4|z-1|^2}{|z|^1|z-1|^1 \left(4 - \frac{1}{2}\right)} \int_{\frac{2}{3}}^2 \cos\left(\arg \frac{z}{z-1} + \frac{i}{-2t}\right) dt \\ &+ \frac{-i \ln \left| \frac{z}{z-1} \right|}{2\pi^2 \ln 2} \frac{|z|^4 - 16|z-1|^4}{|z|^2|z-1|^2 \left(16 - \frac{1}{4}\right)} \int_{\frac{2}{3}}^2 \cos 2\left(\arg \frac{z}{z-1} + \frac{i}{-2t}\right) dt \\ &+ \frac{-i \ln \left| \frac{z}{z-1} \right|}{2\pi^2 \ln 2} \frac{|z|^6 - 64|z-1|^6}{|z|^3|z-1|^3 \left(64 - \frac{1}{8}\right)} \int_{\frac{2}{3}}^2 \cos 3\left(\arg \frac{z}{z-1} + \frac{i}{-2t}\right) dt + \dots \\ &\approx \frac{i \ln \left| \frac{z}{z-1} \right|}{\pi \ln 2} (\ln 3) \\ &\quad + \frac{-i \ln \left| \frac{z}{z-1} \right|}{2\pi^2 \ln 2} \frac{|z|^2 - 4|z-1|^2}{|z|^1|z-1|^1 \left(4 - \frac{1}{2}\right)} \int_{\frac{2}{3}}^2 \left(\cos\left(\arg \frac{z}{z-1}\right) \cos\left(\frac{i}{2t}\right) \right. \\ &\quad \left. + \sin\left(\arg \frac{z}{z-1}\right) \sin\left(\frac{i}{2t}\right) \right) dt + \dots \\ &\approx \frac{i \ln \left| \frac{z}{z-1} \right|}{\pi \ln 2} (\ln 3) + \frac{-i \ln \left| \frac{z}{z-1} \right|}{2\pi^2 \ln 2} \frac{|z|^2 - 4|z-1|^2}{|z|^1|z-1|^1 \left(4 - \frac{1}{2}\right)} \cos\left(\arg \frac{z}{z-1}\right) \int_{\frac{2}{3}}^2 \cos\left(\frac{i}{2t}\right) dt \\ &+ \frac{-i \ln \left| \frac{z}{z-1} \right|}{2\pi^2 \ln 2} \frac{|z|^2 - 4|z-1|^2}{|z|^1|z-1|^1 \left(4 - \frac{1}{2}\right)} \sin\left(\arg \frac{z}{z-1}\right) \int_{\frac{2}{3}}^2 \sin\left(\frac{i}{2t}\right) dt + \dots \end{aligned}$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$\approx \frac{i \ln \left| \frac{z}{z-1} \right|}{\pi \ln 2} (\ln 3) + \frac{-i \ln \left| \frac{z}{z-1} \right|}{2\pi^2 \ln 2} \frac{|z|^2 - 4|z-1|^2}{|z|^1 |z-1|^1 \left(4 - \frac{1}{2}\right)} \cos \left(\arg \frac{z}{z-1} \right) \int_{\frac{2}{3}}^2 \cosh \frac{1}{2t} dt$$

$$+ \frac{\ln \left| \frac{z}{z-1} \right|}{2\pi^2 \ln 2} \frac{|z|^2 - 4|z-1|^2}{|z|^1 |z-1|^1 \left(4 - \frac{1}{2}\right)} \sin \left(\arg \frac{z}{z-1} \right) \int_{\frac{2}{3}}^2 \sinh \frac{1}{2t} dt + \dots$$

$$\int_{\frac{2}{3}}^2 \cosh \frac{1}{2t} dt \approx 1.46119$$

$$\int_{\frac{2}{3}}^2 \sinh \frac{1}{2t} dt \approx 0.570468$$

$$\approx \frac{i \ln \left| \frac{z}{z-1} \right|}{\pi \ln 2} (\ln 3) + \frac{-i \ln \left| \frac{z}{z-1} \right|}{2\pi^2 \ln 2} \frac{|z|^2 - 4|z-1|^2}{|z|^1 |z-1|^1 \left(4 - \frac{1}{2}\right)} \cos \left(\arg \frac{z}{z-1} \right) 1.46119$$

$$+ \frac{\ln \left| \frac{z}{z-1} \right|}{2\pi^2 \ln 2} \frac{|z|^2 - 4|z-1|^2}{|z|^1 |z-1|^1 \left(4 - \frac{1}{2}\right)} \sin \left(\arg \frac{z}{z-1} \right) 0.570468 + \dots$$

نتيجة 1 :

من خلال المثال السابق نلاحظ أنه من الصعب إيجاد الحل لذلك تم إيجاده بشكل تقريبي وهنا لا بد من الانتباه إلى أن استخدام الطرق العددية تعطي قيمة أدق للحل .

8. حل مسألة ديرخليه على مضلع :

لإيجاد الحل لمسألة ديرخليه على المضلع سوف نقوم باستخدام تحويلات شواريز كريستوفل لتحويل المضلع إلى نصف المستوي العلوي أي سوف يتم تحويل المسألة إلى إيجاد الحل لمسألة ديرخليه على نصف المستوي العلوي .

تعريف 1.8 : لتكن $\alpha_r \in \mathbb{R}$ و $\alpha_{r-1} < \alpha_r$ لأجل $r = 1, 2, 3, \dots, n$ حيث $0 \leq \alpha_r \leq 2$ وليكن $z_0 \in \mathbb{C}$ مع $Imz_0 \geq 0$ والثابت $A, B \in \mathbb{C}$ حيث $A \neq 0$ يعرف تحويل شواريز كريستوفل بالعلاقة :

$$w = f(Z) = A \int_{z_0}^z \prod_{r=1}^n (u - a_r)^{\alpha_r - 1} du + B$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

حيث $\prod_{r=1}^n (u - a_r)^{\alpha_r - 1}$ يعرف يتابع القيمة المفردة والذي يكون تحليلي في نصف المستوي العلوي .

تحويل شواريز كريستوفل يُعرف في نصف المستوي العلوي وعلى قطعة من المستقيم الحقيقي $\{x \in \mathbb{R}, \alpha_r - 1 < x < a_r\}$. النقاط a_r تشير إلى الرؤوس [4] .

مبرهنة 1.8 : [7]

ليكن P المضلع الذي يتكون من الرؤوس الداخلية v_1, v_2, \dots, v_n والزوايا الداخلية $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, \dots, \alpha_n\pi$ بعكس دوران عقارب الساعة , ليكن f أي تحويل محافظ من نصف المستوي العلوي إلى المضلع P فإن :

$$f(Z) = A \int_{z_0}^z \prod_{k=1}^n (\xi - P_k)^{\alpha_k - 1} d\xi + B$$

لأجل الثوابت العقدية A, B حيث $v_k = f(P_k)$ و $K = 1, 2, 3, \dots, n$.

❖ نقدم في هذا القسم طريقة بسيطة لحل مسائل ديرخليه التوافقية لإظهار أنماط التدفق المثالي للسوائل في المجالات التي تتكون حدودها من قطع مستقيمة من خلال تحويل هذا المسألة إلى مسألة تدفق السائل فوق لوح مسطح أي في النصف العلوي $Imz > 0$ للمستوي z .

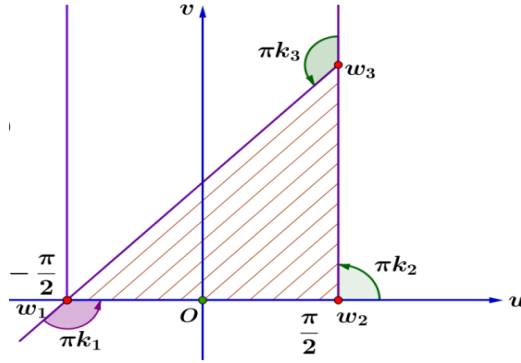
سألة 1 : [6]

لنوجد حل مسألة ديرخليه الآتية على المضلع المحقق للشروط للحدية :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 \\ -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2} \text{ and } v = 0 & f_1(u) = 0 \\ u = \frac{\pi}{2} & f_2(v) = chv \\ -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2} \text{ and } v = \frac{\pi}{2} & f_3(u) = 0 \end{cases}$$

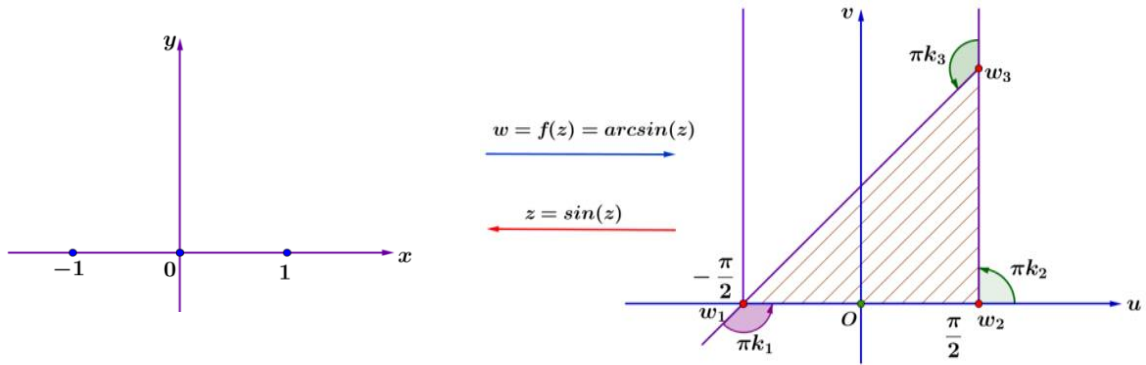


المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية



الحل:

نقوم أولاً بإيجاد تحويل شواريز كريستوفل كالتالي :



نلاحظ من الشكل أن :

$$\pi k_1 = \pi k_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow k_1 = k_2 = \frac{1}{2}$$

$$\pi k_3 = \pi \Rightarrow k_3 = 1$$

وباختيار :

$$x_3 = \infty, \quad x_2 = 1, \quad x_1 = -1$$

وباستخدام تحويل شواريز كريستوفل

$$w = f(z) = A \int_{z_0}^z (z - x_1)^{-\frac{1}{2}} (z - x_2)^{-\frac{1}{2}} dz + B$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$= A \int_{z_0}^z (z-1)^{-\frac{1}{2}}(z+1)^{-\frac{1}{2}} dz + B = A \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(z-1)(z+1)}} + B$$
$$= A \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{-1}\sqrt{1-z^2}} + B = iA \sin^{-1} z + B \Rightarrow w = f(z) = iA \arcsin(z) + B$$

وبتعويض الشروط :

$$\text{لأجل } z = -1 \text{ فإن } w = -\frac{\pi}{2} \text{ ومنه}$$

$$-\frac{\pi}{2} = iA \arcsin(-1) + B$$

$$-\frac{\pi}{2} = iA \left(-\frac{\pi}{2}\right) + B \quad (1)$$

$$\text{لأجل } z = 1 \text{ فإن } w = \frac{\pi}{2} \text{ ومنه}$$

$$\frac{\pi}{2} = iA \arcsin(1) + B$$

$$\frac{\pi}{2} = iA \left(\frac{\pi}{2}\right) + B \quad (2)$$

بجمع المعادلتين (1) و (2) نجد أن $B = 0$ ومنه

$$\frac{\pi}{2} = iA \left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow iA = 1$$

وبالتالي فإن التحويل المطلوب هو

$$w = f(z) = \arcsin z \Rightarrow z = \sin w$$

من خلال تحويل شواريز كريستوفل وجدنا أن :

$$z = \sin w \Rightarrow x + iy = \sin(u + iv)$$

$$x + iy = \sin u \cos(iv) + \cos u \sin(iv)$$

$$x + iy = \sin u \operatorname{ch}v + i \cos u \operatorname{sh}v$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \sin u \operatorname{ch}v \\ y = \cos u \operatorname{sh}v \end{cases}$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

وبتعويض الشروط الحدية نجد أن :

$$-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2} \text{ and } v = 0 \quad (1)$$

$$x = \sin u \Rightarrow u = \arcsin x$$

$$u = \frac{\pi}{2} \text{ and } w = v \quad (2)$$

$$x = \operatorname{ch} v \Rightarrow v = \operatorname{arcch} x$$

$$-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2} \text{ and } v = \frac{\pi}{2} \quad (3)$$

$$y = \cos u \Rightarrow u = \arccos y$$

وبالتالي تصبح الشروط الحدية الجديدة كالتالي :

$$f_1(u) = f_1(\arcsin x) = 0$$

$$f_2(v) = f_2(\operatorname{arcch} x) = \operatorname{ch}(\operatorname{arcch} x) = x$$

$$f_3(u) = f_3(\arccos y) = 0$$

ومن المعلوم أن الحل على نصف المستوي العلوي يعطى بالعلاقة :

$$u(x, y) = \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{y^2 + (x-t)^2} dt$$

$$= \frac{y}{\pi} \left(\int_{-\infty}^{-1} \frac{f_1(t)}{y^2 + (x-t)^2} dt + \int_{-1}^1 \frac{f_2(t)}{y^2 + (x-t)^2} dt + \int_1^{\infty} \frac{f_3(t)}{y^2 + (x-t)^2} dt \right)$$

$$= \frac{y}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{f_2(t)}{y^2 + (x-t)^2} dt = \frac{y}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{t}{y^2 + (x-t)^2} dt = \frac{y}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{t+x-x}{y^2 + (x-t)^2} dt$$

$$= \frac{y}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{t-x}{y^2 + (x-t)^2} dt + x \int_{-1}^1 \frac{dt}{y^2 + (x-t)^2}$$

$$= \frac{y}{\pi} \left(\left| \frac{1}{2} \ln |y^2 + (x-t)^2| \right|_{-1}^1 + \left| \frac{x}{y} \arctan \frac{x-t}{y} \right|_{-1}^1 \right)$$

$$= \frac{y}{\pi} \left(\frac{1}{2} \ln |y^2 + (x-1)^2| - \frac{1}{2} \ln |y^2 + (x+1)^2| \right)$$



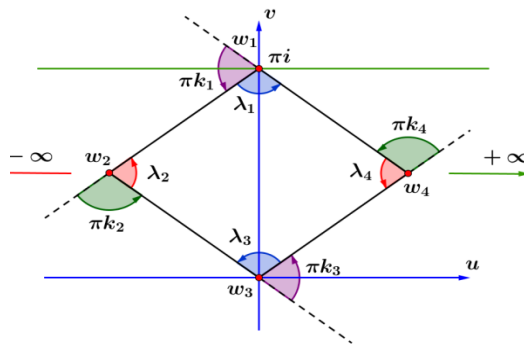
المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$\begin{aligned}
 & + \frac{y}{\pi} \left(\frac{x}{y} \arctan \frac{x-1}{y} - \frac{x}{y} \arctan \frac{x+1}{y} \right) \\
 & = \frac{y}{\pi} \left(\frac{1}{2} \ln \frac{y^2 + (x-1)^2}{y^2 + (x+1)^2} \right) + \frac{yx}{\pi y} \left(\arctan \frac{x-1}{y} - \arctan \frac{x+1}{y} \right) \\
 & = \frac{y}{\pi} \left(\ln \left(\frac{y^2 + (x-1)^2}{y^2 + (x+1)^2} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{x}{\pi} \left(\arctan \frac{x-1}{y} - \arctan \frac{x+1}{y} \right) \right)
 \end{aligned}$$

مسألة 2 : [6]

لنوجد حل مسألة ديرخليه على المضلع المحقق للشروط الحدية :

$$\begin{cases}
 \Delta u = 0 & \\
 0 \leq u \leq \pi \text{ and } 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2} & f_1(u, v) = 0 \\
 0 \leq u \leq \pi \text{ and } 0 \leq v \leq \pi & f_2(u) = e^u \\
 -\pi \leq u \leq 0 \text{ and } \frac{\pi}{2} \leq v \leq \pi & f_3(v) = e^v \\
 -\pi \leq u \leq 0 \text{ and } 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2} & f_4(u, v) = 0
 \end{cases}$$

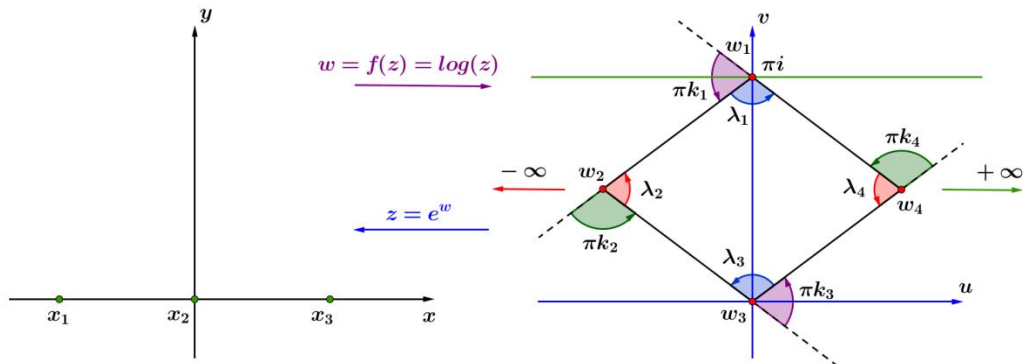


الحل:



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

نقوم أولاً بإيجاد تحويل شواريز كريستوفل كالتالي :



نلاحظ

أن :

$$\lambda_1 = \pi, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = \pi, \lambda_4 = 0$$

$$\pi k_1 = \pi - \lambda_1, \pi k_2 = \pi, \pi k_3 = \pi - \lambda_3, \pi k_4 = \pi$$

ومنه

$$k_1 = 0, k_2 = 1, k_3 = 0, k_4 = 0$$

باختيار

$$x_4 = \infty, x_2 = 0, x_3 = 1$$

وباستخدام تحويل شواريز كريستوفل

$$w = f(z) = A \int_{z_0}^z (z - x_1)^{-k_1} (z - x_2)^{-k_2} (z - x_3)^{-k_3} dz + B$$

$$= A \int_0^z (z - x_1)^0 (z - x_2)^{-1} (z - x_3)^0 dz + B = A \int_0^z \frac{dz}{z - x_2} + B$$

$$= A \int_0^z \frac{dz}{z} + B = A \log z + B$$

لنعين قيمة الثوابت :

لأجل $z = x_3 = 1$ فإن $w_3 = 0$ ومنه

$$0 = A \log(1) + B \Rightarrow B = 0$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

لأجل $z = x_1$ (قيمة حقيقية سالبة) $arg x_1 = \pi$ فإن $w_1 = \pi i$ ومنه

$$w_1 = A(\ln|x_1| + iarg(x_1))$$

$$\pi i = A \ln|x_1| + \pi i A \Rightarrow \pi i = \pi i A \Rightarrow A = 1$$

$$x_1 = -1 \text{ بحيث}$$

ومنه فإن تحويل شواريز كريستوفل المطلوب يعطى بالشكل

$$w = f(z) = \log z \Rightarrow z = e^w$$

- لنوجد الحل لمسألة ديرخليه على المضلع , وجدنا أن

$$z = e^w$$

$$x + iy = e^{u+iv}$$

$$x + iy = e^u e^{iv}$$

$$\Rightarrow x = e^u, \quad y = e^v$$

وبتعويض الشروط الحدية نجد أن :

$$0 \leq u \leq \pi \text{ and } 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2} \quad (1)$$

$$x = e^u, \quad y = e^v$$

$$(0 = v \text{ نثبت}) \quad 0 \leq u \leq \pi \text{ and } 0 \leq v \leq \pi \quad (2)$$

$$x = e^u$$

$$(-\pi \leq u \leq 0 \text{ نثبت } 0 = u) \text{ and } \frac{\pi}{2} \leq v \leq \pi \quad (3)$$

$$y = e^v$$

$$-\pi \leq u \leq 0 \text{ and } 0 \leq v \leq \frac{\pi}{2} \quad (4)$$

$$x = e^u, \quad y = e^v$$

وبالتالي تصبح الشروط الحدية الجديدة بالشكل :

$$f_1(u, v) = 0 \quad f_4(u, v) = 0$$

$$f_2(u) = e^u = e^{\ln x} = x$$

$$f_3(v) = e^v = e^{\ln y} = y$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

ومن المعلوم أن الحل على نصف المستوي العلوي يعطى بالعلاقة :

$$\begin{aligned}u(x, y) &= \frac{y}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)}{y^2 + (x-t)^2} dt \\&= \frac{y}{\pi} \left(\int_{-\infty}^{-1} \frac{f_1(t)}{y^2 + (x-t)^2} dt + \int_{-1}^0 \frac{f_2(t)}{y^2 + (x-t)^2} dt \right) \\&\quad + \int_0^1 \frac{f_3(t)}{y^2 + (x-t)^2} dt + \int_1^{\infty} \frac{f_4(t)}{y^2 + (x-t)^2} dt \\&= \frac{y}{\pi} \left(\int_{-1}^0 \frac{f_2(t)}{y^2 + (x-t)^2} dt + \int_0^1 \frac{f_2(t)}{y^2 + (x-t)^2} dt \right) \\&= \frac{y}{\pi} \left(\int_{-1}^0 \frac{t}{y^2 + (x-t)^2} dt + \int_0^1 \frac{t}{y^2 + (x-t)^2} dt \right) \\&= \frac{y}{\pi} \left(\int_{-1}^0 \frac{t+x-x}{y^2 + (x-t)^2} dt + \int_0^1 \frac{t+x-x}{y^2 + (x-t)^2} dt \right) \\&= \frac{y}{\pi} \left(\int_{-1}^0 \frac{t-x}{y^2 + (x-t)^2} dt + x \int_{-1}^0 \frac{dt}{y^2 + (x-t)^2} + \int_0^1 \frac{t-x}{y^2 + (x-t)^2} dt \right. \\&\quad \left. + x \int_0^1 \frac{dt}{y^2 + (x-t)^2} \right) \\&= \frac{y}{\pi} \left(\left| \frac{1}{2} \ln|y^2 + (x-t)^2| \right|_{-1}^0 + \left| \frac{x}{y} \arctan \frac{x-t}{y} \right|_{-1}^0 + \left| \frac{1}{2} \ln|y^2 + (x-t)^2| \right|_0^1 \right. \\&\quad \left. + \left| \frac{x}{y} \arctan \frac{x-t}{y} \right|_0^1 \right) \\&= \frac{y}{\pi} \left(-\frac{1}{2} \ln(x+1)^2 + \frac{2}{y} \arctan \frac{x+1}{y} + \frac{1}{2} \ln|y^2 + (x+1)^2| \right)\end{aligned}$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

9. النتائج والتوصيات

من خلال ما سبق تم إيجاد الحل لمسألة ديرخليه في بعض الساحات الخاصة باستخدام التحويلات المحافظة , ونوصي بالعمل على توسيع النطاق ليشمل مسائل التدفق في المجالات ذات الحدود المعقدة و إيجاد الحل لمسألة ديرخليه على ساحات غير محدودة.

المراجع العلمية.

- [1] – A.Karageorghis , Y.S.Smyrlis , conformal Mapping for the efficient MFS solution of Dirichlet boundary Value problems , Article in computing . May 2008 .
- [2] – H. kober , Dictionary of conformal Representation , Admiralty Computing Service , Department of scientific Research and Experiment , Admiralty , London , 1944-1948 .
- [3] – J . Nelson , G . Mayorja , Dirichlet in the upper – Half plane , occidental college . April 22 , 2016 .
- [4] – W.H.Hendiks , The Schwarz - christoffel transformation and elliptic functions , Bachelor Thesis in Mathematics , university of Groningen , October 2009 .
- [5] –W.LAN , conformal Mapping and its Application to Laplace's Equation , Department of Mathematics , university of Norther British colombial , summer 2019
- [6] – T.Costopoulos , The Schwarz - christoffel transformation , Article – September 2001 .
- [7] – U.J.Bauer , conformal Mappings onto simply and Multiplay connected circular Arc polygon Domains , university Wurzburg 2015 .

**The Importance of Neutrosophic logic as a Tool in
Educational and Psychological Research**

***Muhammad Almusa AlSaleh**

****Hiba Rakan Al- Ali**

Manar Hasan Al Khader***



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

ABSTRACT

In this new article, we will talk about The Importance of Neutrosophic logic as a Tool in Educational and Psychological Research. Smarandache laid the foundation for neutrosophic logic, which is based on the principle that an idea is determined not only by the degree of truth but also by the degree of falsehood and indeterminacy. Smarandache propose that neutrosophy is a computational method around the idea of neutrality, a neutrosophic set considers affiliation, non-affiliation, and degree of indeterminacy. This logic is based on a scientific methodology that is concerned with the process of continuous and accelerated development since educational research is a powerful tool for achieving development and progress in the educational field, and it must be based on an accurate and logical scientific methodology to achieve its goal effectively, it was necessary to shed light and direct the attention of researchers in the field of education and psychology towards neutrosophic logic as a tool in scientific research .

Introduction

Smarandache presented his theory of the neutrosophic as a generalization of Hegel's dialectic, which is the basis of his research in mathematics and economics , such as neutrosophic logic, neutrosophic groups, neutrosophic probability, and neutrosophic statistics, where he explained that the neutrosophic concept is a field for studying any idea, principle, or perception, produced by the human mind, which aims primarily to explaining the dialectical relationship between ideas and their ability to be accepted, rejected, modified, or copied according to spatial or temporal variables, which is concerned with the continuous and accelerating development process of the human mind.(Smarandache, Salsh,2017) In 2019, Florentin Smarandache published his book, introduction to neutrosophic sociology, which was translated into Arabic in 2023 by Dr. Riad Al-Hamido, Hiba Al-Ali and Manar Al Khader, in this book he presented a study of sociology using neutrosophic scientific methods, and he compared classical sociology from neutrosophic logic, and presented many examples and applications. Since the relationship between philosophy and mathematic is a reciprocal relationship, neutrosophic logic also allows us to research mathematics. Neutrosophic logic in mathematical field is based on considering the distance between accepting or rejecting an opinion as a continuous range and not a definitive one, and it takes the natural option into consideration as an option that must be studied to obtain accurate results that represent the studied reality, which was later popularized by the logic of indeterminacy to expand the field of research in multiple options that can be studied which caught the attention of the researchers and made them highlight in this research the importance of using neutrosophic logic in the field of psychological educational research, considering that the response of the subject to an items of the test or scale with a yes or no without taking the state of neutrality into consideration may affect the validity of the results and in turn. It affects the generalizability of these results, and the subject's refusal to answer the test items may leave the researcher confused about how to deal with these items.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

Problem of the research

Since our world today is full of undefined entities, we today need to make what is inaccurate more precise, and what is unclear more clear. Indeterminacy appears in many improbable experiments and is ignored by logic classical is something that is no longer acceptable at the present. The development of science has put a large number of possibilities in front of probability theory. One of the new issues that isn't explained within the framework of the theory. It is necessary to expand the study data and describe it accurately to include all the results of the experiments that we obtain scientifically especially when studying the probability distribution that accurately determine the features of society, hence the importance of applying neutrosophic logic which takes into account all cases, even those that are not specific, since educational research is an urgent necessity to apply the philosophy of education and the needs of society, it was necessary to pay attention to neutrosophic logic as a tool in psychological educational research. Hence the researchers pose the following question: what is the importance of neutrosophic logic as a tool in psychological educational research.

Importance of research

The importance of research lies in the following:

The modernity of neutrosophic logic and, its importance it is one of the first studies that deal with the importance of this logic and its applicability in educational research, in addition introducing a new method that can benefit researchers in the educational field, and those concerned with development and educational decision-making.

Objective of the research

This research aims to shed light on the importance of neutrosophic logic as a tool in educational research, in order to encourage effective work in education studies and research.

Research methodology

In this research, the researchers relied on the descriptive analytical approach to what has been written about neutrosophic logic, as well as reviewing a number of books and published research that dealt with educational topic from neutrosophic logic.

Search terms and procedural definitions

Logic: it is a science that examines the foundation and rules of correct thinking, historically linked to Aristotle first without the science of logic and the development of its rules and systems. Since then, logical ideas have evolved and influenced multiple fields, including educational research. (Ibn Nahar,2016)



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

Neutrosophic logic: this type of logic is based on the concept of blur and focus on changing and multidimensional objects, and aims to deal with complex and changing matters better. **one of its most important principles and concepts: first, the fuzziness**, as it is based on unclear and changing facts. **Second, pluralism**, it considers the world to be multidimensional and variable. **Third, flexible and logical thinking** encourages the search for appropriate solution to the surrounding circumstances. (Sayad, 2023)

Literature review

Smarandache, Florentin, (2015), Neutrosophic social structures specificities, New Mexico.

This paper is an extension of “(t, i, f)-Neutrosophic Structures” applicability, where were introduced for the first time a new type of structures, called (t, i, f)-Neutrosophic Structures, presented from a neutrosophic logic perspective.

In any field of knowledge, each structure is composed from two parts: a space, and a set of axioms (or laws) acting (governing) on it. If the space, or at least one of its axioms (laws), has some indeterminacy of the form $(t, i, f) \neq (1, 0, 0)$, that structure is a (t, i, f)-Neutrosophic Structure. If the structure is applied to social environment, we have (t, i, f)- Neutrosophic Social Structures.

The (t, i, f)- Neutrosophic Social Structures [based on the components $t = \text{truth}$, $i = \text{numerical indeterminacy}$, $f = \text{falsehood}$] are exponential remodeled in social space from the perspective of social actor.

The social structure allows an infinite freedom of opinion, that is, everybody believes what he wants. The neutrosophic effervescence of social space is more powerful than of scientific environment for the case of natural sciences.

Chicaiza, Carmen, et al, Ecuador, (2020), Neutrosophic psychology for Emotional Intelligence Analysis in Students of the Autonomous University Los Andes.

The main motivation of this paper is to study the state of EI in the students of this university since a high EI will guarantee better future professionals and high-quality learning. The instrument was applied to 245 students. The results showed that there is an indefinite case of the existence of collective emotional intelligence, as the index obtained is not high, and this is the reason the result is very close to being borderline.

Miari, Mahmoud et al, Syria, (2022), Single Valued Neutrosophic Kruskal-Wallis and Mann Whitney Tests.

In this paper, Kruskal-Wallis test is extended to: deal with neutrosophic data in single valued from using score, accuracy and certainty functions to calculate ranks of SVNNs, also Mann Whitney test is extended to deal with same data type which makes it possible to do a post-hoc test after rejecting null hypothesis using Neutrosophic statistic Kruskal-Wallis test.

Examples were successfully solved showing the power of this new idea to deal with SVNNs and make statistical decisions on them.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

Theoretical framework

Philosophy of education is concerned with aspects of education from a philosophical perspective. It seeks to define educational goals and guiding principles for the education process. It can be said that the importance of philosophy of education lies in the:(Ragab, 2018)

Social Development	Promote critical thinking	Guidance
<ul style="list-style-type: none"> • keeping up with what is new and appropriat. • Raising generations familiar with values and morals. 	<ul style="list-style-type: none"> • Encourage asking question. • Encourages the search for logical solutions 	<ul style="list-style-type: none"> • - organizing desired activities. • -Determine desire goal.

Neutrosophic logic is a new logic developed by the Romanian and American scientist Florentin Smarandache.

This logic is based on the development of mathematical sciences, and natural sciences, and seeks to apply logic in diverse fields since educational psychological research is considered one of the most important types of scientific research as it seeks to improve educational practices in the most effective and efficient ways and that this type of research depends on a scientific and logical approach to analyzing educational phenomena and problems.

The need has emerged to use neutrosophic logic as a tool extract more accurate and scientific results. Realistic in the fields of education and psychology, which in turn contributes to improving educational practices, on the other hand, researchers believe that is important to direct the attention of readers, researchers, and decision makers towards this new logic. (Duran, 2021)

The main of concept of neutrosophy is that any idea has not only a certain degree of truth but also a degree of falsity and indeterminacy in its own right. Although there are many applications of neutrosophy in different disciplines, the incorporation of its logic in education and psychology is rather scarce compared to other fields. (Martinez et al,2021)

Definition of Neutrosophication

Neutrosophication means either to transform a crisp value into a neutrosophic component triplet $(\mathcal{T}, \mathcal{I}, \mathcal{F})$, with $\mathcal{T}, \mathcal{I}, \mathcal{F} \subseteq [0, 1]$; or a classical set item x belonging 100% to a classical set $\mathcal{M}_C, x(1,0,0) \in \mathcal{M}_C$, as a neutrosophic item x that only partially belong to a neutrosophic set $\mathcal{M}_N: x(\mathcal{T}, \mathcal{I}, \mathcal{F}) \in \mathcal{M}_N$, with $\mathcal{T}, \mathcal{I}, \mathcal{F} \subseteq [0, 1]$; or for an item x , belonging to a set \mathcal{S} , to find with respect to some attribute the neut(x) $\in \mathcal{S}$ and anti(x) $\in \mathcal{S}$ if any.

Neutrosophication also means: the process of transposing a proposition \mathcal{P} from a space \mathcal{S}_1 to another space \mathcal{S}_2 , and in the same time adjusting its neutrosophic truth-value: $\mathcal{P}(\mathcal{T}_{\mathcal{S}_1}, \mathcal{I}_{\mathcal{S}_1}, \mathcal{F}_{\mathcal{S}_1}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{T}_{\mathcal{S}_2}, \mathcal{I}_{\mathcal{S}_2}, \mathcal{F}_{\mathcal{S}_2})$, where $\mathcal{T}_{\mathcal{S}_1}, \mathcal{I}_{\mathcal{S}_1}, \mathcal{F}_{\mathcal{S}_1}$ are the neutrosophic degrees of truth



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

(membership), indeterminacy, falsehood respectively of the proposition \mathcal{P} with respect to space \mathcal{S}_1 , while $\mathcal{T}_{\mathcal{S}_2}, \mathcal{J}_{\mathcal{S}_2}, \mathcal{F}_{\mathcal{S}_2}$ similarly, but with respect to space \mathcal{S}_2 .

In this book, we do a neutrosophication from the classical to the neutrosophic environment. (Smarandache, 2019,16)

Applications of Neutrosophication

Three most known applications are:

— from classical to neutrosophic: $\mathcal{P}(1, 0, 0) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{T}_{\mathcal{S}_2}, \mathcal{J}_{\mathcal{S}_2}, \mathcal{F}_{\mathcal{S}_2})$;

— from fuzzy to neutrosophic: $\mathcal{P}(\mathcal{T}_{\mathcal{S}}, 0, 0) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{T}_{\mathcal{S}_2}, \mathcal{J}_{\mathcal{S}_2}, \mathcal{F}_{\mathcal{S}_2})$;

— from intuitionistic fuzzy to neutrosophic: $\mathcal{P}(\mathcal{T}_{\mathcal{S}_1}, \mathcal{H}_{\mathcal{S}_1}, \mathcal{F}_{\mathcal{S}_1}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{T}_{\mathcal{S}_2}, \mathcal{J}_{\mathcal{S}_2}, \mathcal{F}_{\mathcal{S}_2})$, where $\mathcal{H}_{\mathcal{S}_1}$ is the hesitant degree in intuitionistic fuzzy environment;

— in general, from a neutrosophic space to another neutrosophic space: $\mathcal{P}(\mathcal{T}_{\mathcal{S}_1}, \mathcal{J}_{\mathcal{S}_1}, \mathcal{F}_{\mathcal{S}_1}) \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{T}_{\mathcal{S}_2}, \mathcal{J}_{\mathcal{S}_2}, \mathcal{F}_{\mathcal{S}_2})$.

Many classical results may be extended from an exact space (space with no indeterminacy) to a space with indeterminacy – as all our reality spaces are. Rarely there are perfect, absolute, theoretical, idealistic spaces – mostly in pure sciences.

A classical item (or entity) \mathcal{P} , that may be: a term, concept, notion, proposition, theorem, lemma, axiom, property, rule, algorithm, idea, thesis, hypothesis, consequence, theory, etc., that is 100% true in a classical, perfect, abstract, or theoretical, absolute space, in another space the same item \mathcal{P} may be only partially true (and partially indeterminate, and partially false).

In each space \mathcal{S} , \mathcal{P} has a specific neutrosophic truth-value as follows: a degree of truth-membership ($\mathcal{T}_{\mathcal{S}}$), a degree of indeterminacy-membership ($\mathcal{J}_{\mathcal{S}}$), and a degree of falsehood-membership ($\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$), where:

$\mathcal{T}_{\mathcal{S}}, \mathcal{J}_{\mathcal{S}}, \mathcal{F}_{\mathcal{S}} \subseteq [0, 1]$. (Previous ref)

Smarandache suggested neutrosophy as a computational solution to the idea of neutrality.

Neutrosophic sets consider belongingness, non-belongingness, and indeterminacy degrees. Intuitionistic fuzzy sets are defined by the degree of belongingness and non-belongingness and uncertainty degrees by the 1- (membership degree plus non-membership degree) while the degree of uncertainty is assessed independently of the degree of belongingness and non-belongingness in neutrosophic sets.

Here belongingness, non-belongingness, and degree of uncertainty (uncertainty, like degree of truth and falsity, can be assessed according to the interpretation of the places to be utilized. This indicates a difference between the neutrosophic set and the intuitionistic fuzzy set.

The definition of neutrosophy is, in this sense, a potential field. (Smarandache, 1998)

Neutrosophic scales offer an intriguing alternative to traditional Likert-type scales

Let's delve into this fascinating topic. In nutshell, here's what you need to know:

1. Likert scales vs neutrosophic scales: Likert scales commonly used scales measure respondents' agreement or disagreement with statements. They typically have options like "strongly agree" "agree" "neutral" "disagree" "strongly disagree".

Neutrosophic scales these scales introduce a new dimension by considering three



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

independent components: truth, falsity, and indeterminacy. Unlike Likert scales, which are binary(true/false), neutrosophic scales allow for more nuanced analysis.

2. Methodology and analysis: Likert scales: classical analysis techniques (e.g factor analysis) are suitable for Likert scales.

Neutrosophic scales: neural networks and other methods are better suited for analyzing neutrosophic data due to their complex structure.

3. Neutrosophic decision-making theory: neutrosophic scales use a score function to grade responses within the range $[-1, 1]$. This approach allows for a more flexible representation of opinions.

Participant's responses are expressed as percentages, resembling natural language.

4. Applications: neutrosophic scales can be applied in various fields, including economics, health, audience, perception, advertising responses, and market research. They provide a way to collect detailed and sensitive information.

5. Statistical analysis: researchers use exploratory factor analysis, reliability analysis, neutrosophic network analysis, correlation analysis, t-tests, and Anovas to evaluate both Likert and neutrosophic scales these analysis help measure organizational justice and other social phenomena. (Khan, Z, Gulistan, M et al, 2020)

In summary, neutrosophic scales offer a richer framework for understanding opinions, allowing for more nuanced and detailed insights. They open up exciting possibilities for research and decision making.

The importance of neutrosophic logic in the field of educational and psychological research:

Neutrosophic logic has principles in common with the principles of educational philosophy (which we mentioned earlier in the research terms and definition), and these principles can contribute and benefit in the context of defining educational goals indirectly, as neutrosophic logic encourages flexible thinking and dealing with complex matters, and we can say that the use of neutrosophic logic in terms of its principles (the fuzziness, pluralism, flexible and logical thinking) can contribute to the field of education in the following way:

1. the use of neutrosophic logic in education research can contribute to defining educational goals to take into account the diversity of students and their different needs.

2. it help in analyzing data and drawing conclusion more accurately.

3. neutrosophic logic seeks to find solution to multiple problems in logical way.

4. neutrosophic logic is more realistic, therefore more useful research results.

5. neutrosophic logic can be used in educational research to analyze complex and changing educational phenomena.

6. neutrosophic logic can contribute to the realisation of the principle of taking into account the individual differences between students when building educational goals.

7. neutrosophic logic encourages critical thinking.

8. neutrosophic logic helps to make educational goals more specific.

9. it can contribute to making the pedagogical process more impersonally.

10. neutrosophic logic is of great importance in educational development, and it's hoped that its application will contribute to achieving a qualitative leap in the field of educational and



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

psychological research.

11. Since neutrosophic logic is closer to reality and simulates practical life, it is therefore more responsive to the needs of society that education philosophy seeks to achieve.

Recommendations and suggestions:

In light of the concept and importance of neutrosophic logic and previous studies related to the topic, the researchers recommend the following:

1. Popularising the concept of neutrosophic logic among university students.
2. Adopting neutrosophic logic as an option for the researcher in the field of education and psychology.
3. Organizing lectures on neutrosophic logic, its importance and how to use it in psychological educational research.
4. Conducting survey studies to measure the extent of researchers' knowledge of this logic.
5. using a mathematics expert in psychological educational research according the neutrosophic logic.
6. Directing authors and writers in the field of education and psychology to develop a chapter to explain the neutrosophic logic and how to work with it.
7. Use the neutrosophic logic in educational and psychological research.
8. Conducting research on the psychometric properties of Likert scales and codifying them according to the neutrosophic logic, to benefit the researcher in education and psychology if he decides to work in this logic.

References

1. Smarandache Florentin, Othman Salah, (2017), Arabic philosophy from a neutrosophic perspective, 1st edition, Al-Jalal printing company, Alexandria.
2. Ragab, Mustafa, (2018), philosophy of education, educational journal, (10) 51, faculty of education, Suhag, 1-9.
3. Smarandache, F, (1998), Neutrosophy: Neutrosophic probability, set and logic, analytic synthesis & synthetic analysis. American research press.
4. Khan, Z, Gulistan, M, et al, (2020), On scale parameter monitoring of the Rayleigh distributed data using a new design. IEEE access, 8.
5. Smarandache, F, (2019), Introduction to neutrosophic sociology (Neutrosociology). Pons publishing House/ Pons asbl, Belgium).
6. Smarandache, Florentin, (2015), Neutrosophic social structures specificities, New Mexico, Social Sciences and Education Research Review, (2) 1 3-10.
7. Chicaiza, Carmen, et al, (2020), Neutrosophic psychology for Emotional Intelligence Analysis in Students of the Autonomous University Los Andes, Neutrosophic Sets and Systems, {Special Issue: Social Neutrosophy in Latin America}, Vol. 33, Ecuador.
8. Miari, Mahmoud et al, Syria, (2022), Single Valued Neutrosophic Kruskal-Wallis and Mann Whitney Tests, Neutrosophic Sets and Systems, Vol. 51, Syria.
9. Duran, V, Topal, S, Smarandache, F, (2021), An application of neutrosophic logic in the confirmatory data analysis of the satisfaction with life scale, Journal of fuzzy extension and application, vol 2, No. 3.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

10. Martinez, Ronelsys et al, (2021), Neutrosophic analysis of the educational orientation to the diabetic patient that reflects its impact on the quality of life, Neutrosophic Sets and Systems, {Special Issue: Social Neutrosophy in Latin America}, Vol. 44, New Mexico.
11. Bin Nahar, Nayef, (2016), Introduction to logic, waai foundation for studies and research, 2nd edition, Doha, Qatar.
12. Sayad, Fatima, Interdisciplinary orientation of neutrosophic philosophical theory, journal of Al Tahbeer, (4) 4, Algeria.

اختبار أنصاف الأقطار الفيثاغورية R واستنتاج النقاط الفيثاغورية المحيطة

(1) مريم خالد النديوي

(3) أ.د. محمد نور شمه

(2) أ.د. عبد الباسط الخطيب

ملخص البحث:

في بحثنا هذا، نقوم بدراسة الكرات الفيثاغورية، وتبين فيما إذا كان نصف قطر كرة ما فيثاغوري أم لا، بطريقة جبرية، تساعد في تطوير خوارزميات البرمجة، المتعلقة بأنصاف الأقطار الفيثاغورية، حيث نضع علاقات، لإيجاد النقاط المحيطة (x, y, z) الفيثاغورية الموافقة لـ R ، عن طريق تطوير مبرهنة *Shamma* في الدوائر، وتعميم المبرهنة من الدوائر إلى الكرات، كما قمنا بمقارنة النتائج بين الطريقتين الجبرية والبرمجية.

الكلمات المفتاحية:

الكرة الفيثاغورية، نصف القطر الفيثاغوري R ، النقطة المحيطة الفيثاغورية، الرباعية الفيثاغورية الأولية.

دراسة مرجعية:

هناك محاولات كثيرة لتوليد الثلاثيات والرباعيات الفيثاغورية [6], [3], [2], [10] حيث تم إيجاد كرات فيثاغورية أولية باستخدام إحدى المركبات فقط (x, y, z, R) [10]، كما تم التفسير باستخدام المصفوفة الفيثاغورية الأولية [4], [5], [8]، وتم توليد ثلاثيات فيثاغورث أولية من أعداد ذات طبيعة خاصة [9]، كما أن فكرة الاعتماد على المصفوفات المربعة $A_{3 \times 3}$ و $A_{4 \times 4}$ وجدت في [7]، حيث تم توليد أكبر عدد ممكن من المصفوفات الفيثاغورية وبالتالي أكبر عدد ممكن من الرباعيات الفيثاغورية في [11].

مشكلة البحث:

إيجاد طريقة جبرية لمعرفة فيما إذا كان نصف قطر الكرة R فيثاغوري أم لا، وذلك لاستخدامه في توليد مفاتيح التشفير داخل الكرات والدوائر الفيثاغورية وتطبيق ذلك برمجياً لتشفير نص ذا حجم كبير.

طرائق البحث:



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

بعض التعاريف والمبرهنات ذات الصلة: [1]

تعريف (1): (الدائرة الفيثاغورية: هي دائرة مركزها O ونصف قطرها عدد طبيعي R يحقق معادلة فيثاغورث

$$\exists x, y \in N ; x^2 + y^2 = R^2$$

مثال (1): $C(O, 5)$: دائرة فيثاغورية تحوي نقطة محيطية $(3, 4)$ لأنها تحقق $5^2 = 3^2 + 4^2$

تعريف (2): (الكرة الفيثاغورية: هي كرة مركزها (O) ونصف قطرها R ونحقق وجود نقطة الأقل على السطح تكون مركباتها طبيعية

$$\exists x, y, z \in N ; x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

مثال (2): $S(O, 7)$: كرة فيثاغورية تحوي نقطة محيطية $(2, 3, 6)$ لأنها تحقق $7^2 = 2^2 + 3^2 + 6^2$

تعريف (3): (الثلاثية الفيثاغورية: نقول عن الثلاثية $p(x, y, R)$ إنها ثلاثية فيثاغورية إذا حققت معادلة فيثاغورث

$$\exists x, y \in N ; x^2 + y^2 = R^2$$

مثال (3): (الثلاثية $(5, 12, 13)$ ثلاثية فيثاغورية لأنها تحقق $13^2 = 5^2 + 12^2$

تعريف (4): (الثلاثية الفيثاغورية الأولية: نقول عن الثلاثية $p(x, y, R)$ إنها ثلاثية فيثاغورية أولية إذا حققت معادلة فيثاغورث

$$\exists x, y \in N ; x^2 + y^2 = R^2$$

وكان القاسم المشترك الأكبر لمركباتها يساوي الواحد أي:

$$GCD(x, y, R) = 1 ; x, y, R \in N$$

مثال (4): (الثلاثية $(3, 4, 5)$ فيثاغورية أولية لأنها تحقق $5^2 = 3^2 + 4^2$ وأن $GCD(3, 4, 5) = 1$

تعريف (5): (الرابعة الفيثاغورية: نقول عن الرابعة $p(x, y, z, R)$ إنها رابعة فيثاغورية إذا حققت معادلة فيثاغورث المعممة

$$\exists x, y, z \in N ; x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad (1)$$

مثال (5): (الرابعة $(2, 3, 6, 7)$ فيثاغورية لأنها تحقق $7^2 = 2^2 + 3^2 + 6^2$

تعريف (6): (الرابعة الفيثاغورية الأولية: نقول عن الرابعة $p(x, y, z, R)$ إنها رابعة فيثاغورية أولية إذا حققت معادلة فيثاغورث المعممة (1) وكان القاسم المشترك الأكبر لمركباتها يساوي الواحد أي

$$GCD(x, y, z, R) = 1$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
لمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

مثال (6): الرباعية (2,7,26,27) فيثاغورية أولية لأنها تحقق $2^2 + 7^2 + 26^2 = 27^2$ وتحقق أيضاً $GCD(2,7,26,27) = 1$

ميرهنه شمه (اختبار Shamma) في الدوائر: [12]

الشرط اللازم والكافي حتى يكون العدد $R \in N$ عدداً فيثاغورياً هو وجود عدد طبيعي $n \in N$ ينتمي إلى المجال:

$$n \in]\sqrt{\frac{R}{2}}, \sqrt{R}[$$

بحيث يكون: $\sqrt{R - n^2} \in N$ ، وتكون الثلاثية الفيثاغورية المتولدة هي:

$$(x, y, z) = (2n\sqrt{R - n^2}, |2n^2 - R|, R)$$

مثال (7): (لنبين فيما إذا كان $R = 169$ فيثاغوري أم لا؟)

نأخذ المجال المفتوح

$$n \in]\sqrt{\frac{169}{2}}, \sqrt{169}[=]9.2, 13[$$

$$n = 10 \Rightarrow m = \sqrt{169 - 100} = \sqrt{69} \notin N \Rightarrow m \text{ مرفوض}$$

$$n = 11 \Rightarrow m = \sqrt{169 - 121} = \sqrt{48} \notin N \Rightarrow m \text{ مرفوض}$$

$$n = 12 \Rightarrow m = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5 \in N \Rightarrow m \text{ مقبول}$$

وبالتالي توجد ثلاثية فيثاغورية وحيدة وهي (120, 119, 169)

جديد العمل:

الاختبار المعدل في الدوائر:

بفرض وجود دائرة فيثاغورية حيث أن R نصف القطر فإنه يوجد y^2 على الأقل ضمن المجال نصف المفتوح

$$y^2 \in]\frac{R^2}{2}, R^2 - 9] \Rightarrow x = \sqrt{R^2 - y^2} \in N$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

فتكون الثلاثية (x, y, R) فيثاغورية أساسية

مثال (8): لنبين فيما إذا كان $R = 13$ فيثاغوري أم لا؟

نأخذ المجال نصف المفتوح

$$y^2 \in]\frac{169}{2}, 169 - 9] =]84.5, 160]$$

نوجد مربعات الأعداد داخل المجال المعطى

$$y^2 = 10^2 \Rightarrow x = \sqrt{169 - 100} = \sqrt{69} \notin N \Rightarrow x \text{ مرفوض}$$

$$y^2 = 11^2 \Rightarrow x = \sqrt{169 - 121} = \sqrt{48} \notin N \Rightarrow x \text{ مرفوض}$$

$$y^2 = 12^2 \Rightarrow x = \sqrt{169 - 144} = \sqrt{25} = 5 \in N \Rightarrow x \text{ مقبول}$$

وبالتالي تكون الثلاثية المطلوبة هي: $(5, 12, 13)$

نتيجة مهمة: الطريقة المعدلة تكشف جميع الثلاثيات الفيثاغورية الممكنة الأولية وغير الأولية.

تعميم الاختبار في الكرات:

الشرط اللازم والكافي حتى يكون R فيثاغوري في الكرة $S(O, R)$ هو أن يتحقق الشرطان:

$$1) \exists Z \in N; Z^2 \in]\frac{R^2}{2}, R^2 - 2]$$

$$2) \exists a = R^2 - Z^2; m \in]\sqrt{\frac{a}{2}}, \sqrt{a}[\text{ \& } n = \sqrt{a - m^2}$$

فإذا كانت $m, n, a \in N$ عندها تكون الرباعية الفيثاغورية

$$(x, y, z, R) = (2nm, m^2 - n^2, \sqrt{R^2 - a}, R)$$

مثال (9): ضمن الكرة $S(O, 25)$ وباستخدام طريقة المجال المفتوح التالي:

$$Z^2 \in]\frac{625}{3}, 625 - 2] =]208.33, 623]$$

ومنه

$$Z^2 = 15^2 \rightarrow a = 625 - 225 = 400 \quad \text{مرفوض}$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$Z^2 = 16^2 \rightarrow a = 625 - 256 = 369 = 144 + 225 \rightarrow (12,15,16,25)$$

$$Z^2 = 17^2 \rightarrow a = 625 - 289 = 336 \quad \text{مرفوض}$$

$$Z^2 = 18^2 \rightarrow a = 625 - 324 = 301 \quad \text{مرفوض}$$

$$Z^2 = 19^2 \rightarrow a = 625 - 361 = 264 \quad \text{مرفوض}$$

$$Z^2 = 20^2 \rightarrow a = 625 - 400 = 225 = 81 + 144 \rightarrow (9,12,20,25)$$

$$Z^2 = 21^2 \rightarrow a = 625 - 441 = 184 \quad \text{مرفوض}$$

$$Z^2 = 22^2 \rightarrow a = 625 - 484 = 141 \quad \text{مرفوض}$$

$$Z^2 = 23^2 \rightarrow a = 625 - 529 = 96 \quad \text{مرفوض}$$

$$Z^2 = 24^2 \rightarrow a = 625 - 576 = 49 \quad \text{مرفوض}$$

نلاحظ مما سبق وجود فيثاغوريتين اثنتين فقط وهو ما يتوافق مع برنامج *python* التالي:

```
print(HELLO to SPHer)n = int(input(n=))count = 1count0 = 1count1 = 0import mathfor k in range(1,n): for j in range(1,k): for i in range(1,j): if (i ** 2 + j ** 2 + k ** 2) == n ** 2: print( [count], " = ", [i,j,k,n]) count = count + 1
```

حيث كانت نتيجة الخرج:

HELLO to SPHer

n = 25

[1] = [12, 15, 16, 25]

[2] = [9, 12, 20, 25]

Process finished with exit code 0



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

توصيات ومقترحات:

- نوصي بدراسة طبيعة R حيث يمكن أن يكتب بالشكل $R = R_1 \cdot R_2 \dots R_n$ ومنه نستطيع معرفة عدد الرباعيات الفيثاغورية الأولية المتولدة في الكرات $S(O, R)$ كما في حالة الدوائر الفيثاغورية $C(O, R)$.
- كما نوصي باستخدام هذه النتائج بالتشفير والتي ستقلل من تعقيد الخوارزميات البرمجية.

الخاتمة:

قمنا في بحثنا المطروح بتعديل مبرهنة *shamma* في الدوائر، والتي تنص على اختبار نصف قطر دائرة فيما إذا كان فيثاغوري أو لا، وتعميمها من الدوائر $C(O, R)$ إلى الكرات $S(O, R)$ ، ومقارنة النتائج بين الطريقتين البرمجية والجبرية.

المراجع العلمية

1. G.A. Jones and J. M Jones, "Elementary Number Theory". Springer, 2005.
2. H. Price, "The Pythagorean Tree: A New Species ", (2008), arxiv:0809.4324.
3. K. Raja Gandhi, "Generalization of Pythagorean triplets, quadruple, the bulletin of society for mathematical services and standards", 2012, vol.1.pp 40 – 45.
4. Ahmad Steef, M. N. Shamma and A. Alkhatib, "RSA Algorithm with a New Approach Encryption and Decryption Message Text by ASCII", International Journal on Cryptography and Information Security (IJCIS), Vol. 5, No. 3/4, December 2015.
5. Al Khatib and Shamma, "The Encryption Using Special Pythagorean Function", Journal of AL Baath University, Volume 38 (2016)
6. Al Khatib and Shamma, "Generating basic Pythagorean triples from private integers", Journal of AL Baath University, Volume 38 (2016).
7. Rushall, Gutierrez and McCarty, "On the Complete Tree of Primitive Pythagorean Quadruples". North Arizona University, Flagstaff, Arizona. (2020).

المراجع باللغة العربية

8. محمد نور شمه، عبد الباسط الخطيب، أحمد صطيف، "التشفير باستخدام المصفوفة الفيثاغورية الأولية"، مجلة جامعة البعث مجلد /38/ لعام 2016.
9. محمد نور شمه، إبراهيم عبدو كيالي، "توليد ثلاثيات فيثاغورث أولية من أعداد ذات طبيعة خاصة"، مجلة جامعة البعث مجلد /38/ لعام 2016.
10. محمد نور شمه، عبد الباسط الخطيب، مريم النديوي، "إيجاد كرات فيثاغورية أولية باستخدام إحدى المركبات فقط" (x, y, z, R) ، مجلة جامعة البعث مجلد / 44 / لعام 2022.
11. محمد نور شمه، عبد الباسط الخطيب، مريم النديوي، "توليد مصفوفات فيثاغورية من مصفوفات خاصة"، مجلة جامعة البعث مجلد / 45 / لعام 2023.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

12. محمد نور شمه، عبد الباسط الخطيب، محمد نور الخطيب، "توليد النقاط الصحيحة لبعض الأشكال الفراغية الخاصة وتطبيقاتها في التشفير"، جامعة البعث، 2022 – 2023.

دراسة لعبة Maker-Breaker الموضعية على بيانات خاصة

د. هديل برباره، د. رياض الحميدو، مالك الخضير

الملخص

ترتبط نظرية الألعاب الموضعية بعلوم الحاسب النظرية ارتباطاً وثيقاً، فهي تبنى على بنى نظرية البيان ولها علاقة وثيقة بالخوارزميات ونظريتي التعقيد والحوسبة. نقدم في هذه الورقة دراسة للعبة Maker-Breaker القياسية الموضعية، إذ لا وجود لحالة التعادل هنا، تم فرض شرط على تحركات Maker وهو الحركة ضمن مسلك (Walk) ثم ضمن مسار (path) بينما اللاعب الثاني يتحرك بدون قيود وتمت الدراسة على بيانات تامة وبيانات تكعيبية، وقدمنا أمثلة توضيحية لفهم المبرهنات بشكل أفضل.

الكلمات المفتاحية: ألعاب الباني_الهادم، ألعاب توافقية، ألعاب موضعية، بيان تام، بيان تكعيبية.

Study Of The Positional Maker-Breaker Game On Special Graphs

Abstract: Positional game theory is closely related to theoretical computer science, as it is built on the constructs of graph theory and has a close relationship with algorithms, complexity and computation. In this paper, we present a study of the standard Maker-Breaker game where there is no draw. A restriction was imposed on Maker's moves, which is moves within a walk, while Breaker moves without restrictions. The study was conducted on complete graphs and cubes, and we provided illustrative examples to better understand the theorems.

Key words: Maker-Breaker games, combinatorial games, Positional games, Complete graph, Cube graph.

المقدمة:

قُدمت ألعاب Maker-Breaker من قبل Erdős و Selfridge [1] على أنها تعميم للعبة Tic-tac-toe. ومن ثمّ توالت العديد من النتائج على أنواع من هذا النمط. وفي نسخة قياسية لهذه اللعبة، لتكن X مجموعة منتهية و \mathcal{F} عائلة من المجموعات الجزئية من X ، ولتكن a و b أعداد صحيحة موجبة معطاة، في لعبة Maker-Breaker (الباني_الهادم) $(a: b)$ التوافقية الموضعية والتي يرمز لها بالرمز (X, \mathcal{F}) ، يوجد لاعتين، أحدهما يدعى Maker (الباني أو الصانع) والآخر يدعى Breaker



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي للمدة 4 - 5 اب 2024 دمشق - سورية

(الهادم أو المخرب) يأخذ الباني دوره في استدعاء a عنصر من المجموعة X ويأخذ الهادم دوره في استدعاء b عنصر من المجموعة ذاتها. ومن الطبيعي جداً أن تُلعب ألعاب (الباني_الهادم) على أضلاع لبيان معطى G ، أي عندما تكون المجموعة X ممثلة بأضلاع البيان المعطى، أي أن $X = E(G)$ ، ومجموعات الربح هي بُنى معينة في نظرية البيان، كأن تكون أشجار مولدة أو حلقات هاملتونية أو غير ذلك من البنى حسب مقتضيات الدراسة. وبالتالي إذا أخذنا نسخة قياسية تُلعب على بيان تام K_n ، فإن كلاً من الباني والهادم يأخذان دورهما في استدعاء أضلاع من الرسم البياني المعطى، حيث يحاول الباني (قد يكون فريق أو مؤسسة أو جيش ...) بناء بنية خاصة من الأضلاع التي استطاع الحصول عليها، بينما ينصب هدف الهادم (أيضاً، قد يكون فريق أو مؤسسة أو جيش ...) على منع الأول من الوصول إلى هدفه.

نعتبر النوع التالي من لعبة Maker-Breaker القياسية، في هذا النوع يقوم Maker، عند حلول دوره في التحرك سواء كان هو من يبدأ اللعبة أم لا، باستدعاء الأضلاع وفقاً لمسلك (Walk) على التوالي، أي أنه عند أي لحظة من اللعبة إذا كان Maker عند رأس v من البيان G وحان دوره في التحرك، فإنه يتحرك على امتداد ضلع $e \in G$ بحيث أنه يحقق شرطين أولهما أن يكون هذا الضلع واقعاً على الرأس v ، وثانيهما أن هذا الضلع لم يتم الاستيلاء عليه من قبل Breaker.

وفي بعض الأحيان يسمح للاعب Breaker القيام بالاستيلاء على أكثر من ضلع في الحركة الواحدة، نرسم لهذه الحالة المتحيزة بالرمز $(1: \alpha)$.

نعتبر في هذا البحث بأن لعبة Maker-Breaker ضمن الشرط الموضح أعلاه، أن هدف Maker هو الحصول على العديد من الرؤوس ما استطاع إلى ذلك سبيلاً، بينما يهدف Breaker إلى تقليل عدد الرؤوس الممكن زيارتها من قبل Maker وذلك من خلال الاستيلاء عليها، وتنتهي اللعبة عندما لا يوجد مسلك (ممر) من موضع Maker الحالي إلى أي رأس غير مزار على طول الأضلاع غير المُستدعاة من قبل Breaker.

ومن المسلم به عند دراسة تحرك Maker ضمن مسلك فلا بد من دراسة حركته ضمن مسار، وبالتالي سنعتبر ذلك تنوع آخر من هذه اللعبة، حيث أن Maker لا يستطيع إعادة زيارة رؤوس قد زارها مسبقاً على حين كان يستطيع فعل ذلك عندما كان يتحرك وفق مسلك، وهنا تنتهي اللعبة عندما لا يوجد مسار من موضع Maker الحالي إلى أي رأس غير مزار على طول الأضلاع التي لم يستولي عليها Breaker والرؤوس غير المُزارة مسبقاً من قبل Maker.

ولتجنب الالتباس بين النوعين سنرمز للنوع الأول (الحركة ضمن مسلك) بـ $WMaker-Breaker$ ، وللنوع الثاني (الحركة ضمن مسار) بـ $PMaker-Breaker$.

علماً أنه قد تمت معالجة ألعاب Maker-Breaker في كتاب Beck [2] وكذلك الدراسة الأخيرة لـ Hefetz و Krivelevich وآخرون [6].

1. هدف البحث:

ينصب تركيز البحث عموماً في دراسة لعبة Maker-Breaker وذلك عندما تنقيد حركة Maker ضمن مسلك أو مسار على بيان مترابط، بينما حركة Breaker غير مقيدة بشرط، والبيانات المترابطة التي تم العمل عليها هي البيانات التامة K_n ($n \geq 6$)، والنوع الآخر هي البيانات التكعيبية (n -cube)، ونريد معرفة كم عدد الرؤوس التي يستطيع Maker الحصول عليها.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي للمدة 4 - 5 اب 2024 دمشق - سورية

2. طرق ومواد البحث:

التعاريف والمفاهيم الأساسية [2],[5],[6]:

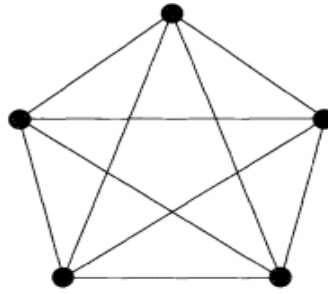
[1] اللعبة التوافقية (Combinatorial Game): تتعامل اللعبة التوافقية مع نوع محدد من الألعاب الثنائية، ويمكن وصفها على النحو التالي:

- هناك لاعبان يتبادلان التحرك.
- لا توجد أدوات حظ مثل حجر النرد أو البطاقات العشوائية.
- هناك معلومات كاملة، أي كلا اللاعبين يعرفان جميع الحركات المتاحة لكلا اللاعبين.
- تنتهي اللعبة في النهاية، حتى ولم يتبادل اللاعبان التحركات.
- تنتهي اللعبة عندما يجد أحد اللاعبين نفسه غير قادر على القيام بأي حركة قانونية.

[2] اللعبة الموضعية (Positional Game): لاعبين يتبادلان بشغل نقاط جديدة. اللاعب الذي يستطيع أولاً شغل مجموعة ربح (winnig set) هو الفائز، أما إذا لم توجد مجموعة ربح فيعلن عن اللعبة أنها تعادل.

[3] لعبة Maker-Breaker: يتبادل اللاعبان Maker و Breaker بشغل نقاط جديدة. يربح Maker في نهاية اللعبة إذا ما استطاع شغل كافة العناصر لأغلب مجموعات الربح، ويربح Breaker إذا ما استطاع شغل واحد على الأقل من كل مجموعة ربح. (هنا لا يوجد تعادل بين اللاعبين، إما رابح أو خاسر، وبالتالي لعبة Maker-Breaker هي حالة خاصة من الألعاب الموضعية.)

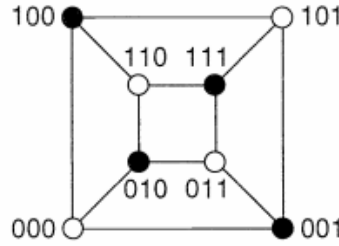
[4] البيان التام (K_n): نقول عن البيان $G(V, E)$ ، حيث V مجموعة الرؤوس و E مجموعة الأضلاع، أنه بيان تام (Complete graph) إذا كان كل رأس في البيان يجاور جميع رؤوس البيان الأخرى، وبالتالي لكل رأس الدرجة $n-1$.



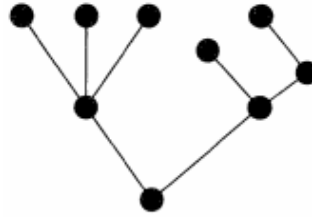
[5] البيان التكميبي (Q_n): هو بيان منتظم من المرتبة 2^n والدرجة n ، كما أن رؤوس البيان مرتبة وفق متجه (a_1, a_2, \dots, a_n) حيث $(a_i = 0 \text{ or } 1)$ لأجل $(i = 1, 2, \dots, n)$ ويكون الرأسان متجاورين إذا اختلفا بمركبة واحدة فقط من مركبات متجهي الرأسين. ولهذه البيانات أهمية خاصة وهي تنتج من تعريف الجداء الديكارتي للبيانات ويرمز له بـ Q_n . Q_n (n-cube) يكون K_2 عندما $n = 1$ ، أي أن $Q_1 = K_2$. إذا كان $n > 1$ نعرف Q_n بشكل متتابع، أي أن $Q_n = Q_{n-1} \times K_2$. حيث أن البيان التكميبي هو البيان كما في الشكل التالي:



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية



[6] **الشجرة (Tree):** هي بيان مترابط خالٍ من الحلقات، والبيان غير المترابط الذي لا يحوي حلقات يسمى غابة (forest) وبناءً على تعريف الغابة فإن الشجرة غابة مؤلفة من مركبة وحيدة.



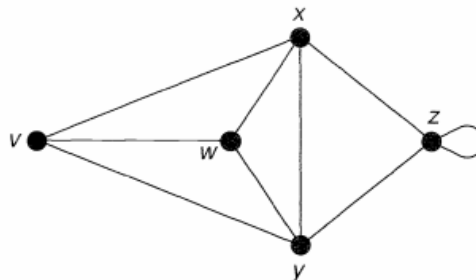
[7] **المسلك (Walk):** ليكن البيان $G(V, E)$ ، وليكن u و v رأسين من البيان G (ليس بالضرورة متميزان). نسمي $W=u-v$ مسلك (walk) من الرأس u إلى الرأس v ، إذا كان W متتالية متناوبة من الرؤوس والأضلاع بالشكل التالي:

$$u = v_0, e_0, v_1, e_1, v_2, \dots, v_{k-1}, e_{k-1}, v_k = v$$

من الممكن تكرار الرؤوس والأضلاع في المسلك.

[8] **المسار (Path):** هو مسلك شريطة عدم تكرار الرؤوس أو الأضلاع.

مثال: ليكن لدينا البيان التالي:





المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

لدينا المتتالية $v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow z \rightarrow y \rightarrow w$ عبارة عن مسلك (ممر) أما المتتالية $v \rightarrow w \rightarrow x \rightarrow y \rightarrow z$ فهي عبارة عن مسار.

1. النتائج والمناقشات:

المبرهنة (1): ليكن البيان $G(V, E)$ عبارة عن بيان تام، حيث أن عدد الرؤوس n يحقق $n \geq 6$ ، وضمن عملية لعب مثالية في لعبة PMaker-Breaker $(1:1)$ ، فإن اللاعب Maker يزور كل الرؤوس باستثناء اثنين منها.

المبرهنة (2): ليكن البيان $G(V, E)$ عبارة عن بيان تام، وضمن عملية لعب مثالية في لعبة WMaker-Breaker $(1: \alpha)$ على البيان G بحيث $(n \geq 2\alpha^2)$ ، فإن Maker يزور $n - 2\alpha + 1$ رأس، حيث $(\alpha \geq 1)$.

المبرهنة (3): ليكن البيان $G(V, E)$ عبارة عن بيان تكعيبي، فإنه ضمن عملية لعب مثالية في لعبة WMaker-Breaker، فإن Maker يزور على الأقل 2^{n-2} رأس وعلى الأكثر 2^{n-1} رأس.

بعض الرموز:

لتكن V_t تشير إلى مجموعة الرؤوس التي تمت زيارتها من Maker، ولتكن U_t تشير إلى خلاف ذلك، وذلك بعد قيام Maker بالحركة t . حيث أن Maker يكون عند الرأس v_t وذلك بعد قيامه بالحركة t . نشير إلى البيان المحدث بأضلاع Breaker بـ Γ_B ، وإلى البيان المحدث بأضلاع Maker بـ Γ_M .

إثبات المبرهنة (1): من الواضح أنه في اللحظة t سيكون البيان Γ_M عبارة عن مسار. علماً أن المسألة ليست مسألة من يبدأ أولاً بالتحرك، ولإظهار ذلك نفرض أن Maker يبدأ أولاً من أجل أي حد أدنى على عدد الرؤوس التي تمت زيارتها، ويبدأ Breaker من أجل أي حد أدنى على عدد الرؤوس التي تمت زيارتها.

الحد الأدنى: يتبع Maker الاستراتيجية التالية: إذا كان $|U_t| > 2$ وقام Breaker باختيار f_t حيث $f_t \cap V_{t-1} = \emptyset$ فإن Maker يتحرك إلى $v_t \in f_t$. بخلاف ذلك، فإن Maker يتحرك إلى رأس كفي. وطالما أن Maker قادر على اتباع هذه الاستراتيجية، سيكون لدينا بعد كل تحرك لـ Maker ما يلي:

كل ضلع لـ Breaker يحتوي على عنصر من V_t . (1)

نتحقق الآن فيما إذا كانت هذه الاستراتيجية مجدية لـ $|U_t| > 2$. نبدأ مع النوع الأول من أضلاع Breaker، والتي تكون منفصلة عن V_t . في الحركة t ، ليكن $v_{t-1} = x$ و $v_t = y$. بفرض أن Breaker اختار الضلع (b_1, b_2) حيث $b_1, b_2 \notin V_t$ ، ومن أجل $i = 1, 2$ فإن (y, b_i) هو ضلع لـ Breaker. ونعتبر هذه هي المرة الأولى التي يحدث فيها هذا الوضع. ثم نفرض أن (y, b_i) هو الضلع s_i المختار من Breaker (حيث $s_1 < s_2$). فإننا نحصل على تعارض مع العلاقة (1) بعد اختيار الرأس x . وإذا ما تم اختيار الرأس x ، فإن (y, b_i) هو ضلع لـ Breaker والذي لا يحتوي على عناصر من V_{t-1} .

نعتبر الآن الحالة التي يكون فيها ضلع لـ Breaker واقع على عنصر في V_t . العلاقة (1) تشير إلى أن اختيار Breaker هو في الغالب الضلع الثاني بين الرأس v_t والمجموعة U_t . وعلى وجه الخصوص، $|U_t| > 2$ تشير إلى أن Maker بإمكانه التحرك إلى رأس لم تتم زيارته. وبالتالي سينجح Maker بزيارة كل الرؤوس باستثناء اثنين منها.

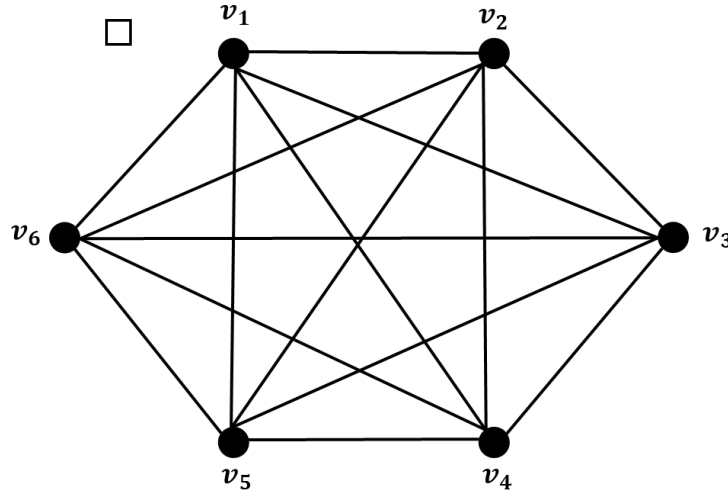


المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

الحد الأعلى: يلعب Breaker بشكلٍ كافي لغاية حركته عند الدور $n - 4$ ، عندما $|U_{n-4}| > 4$. يختار في حركته التاليين ضلعين من تجزئة مستقلة من U_{n-4} . وبعد هاتين الحركتين (مع حركة لـ Maker بينهما)، يحين دور Maker، ويتبقى ثلاثة رؤوس غير مُزارّة. وأياً يكن الرأس من U_{n-3} فإن Maker ربما يختار التحرك إلى الرأس التالي، وهذا الرأس سيكون متجاوزاً مع رأس في U_{n-2} على طول أحد ضلعي التجزئة المستقلة لـ Breaker؛ وبالتالي مع وجود حركة إضافية، فإن Breaker سيضمن أن كلًّا من الضلعين من الرأس v_{n-2} إلى المجموعة U_{n-2} تكون مشغولة من قبله.

مثال (1): ليكن لدينا البيان K_6 ، ولنقم بتطبيق استراتيجية Maker كما يلي:

في بداية اللعبة يكون

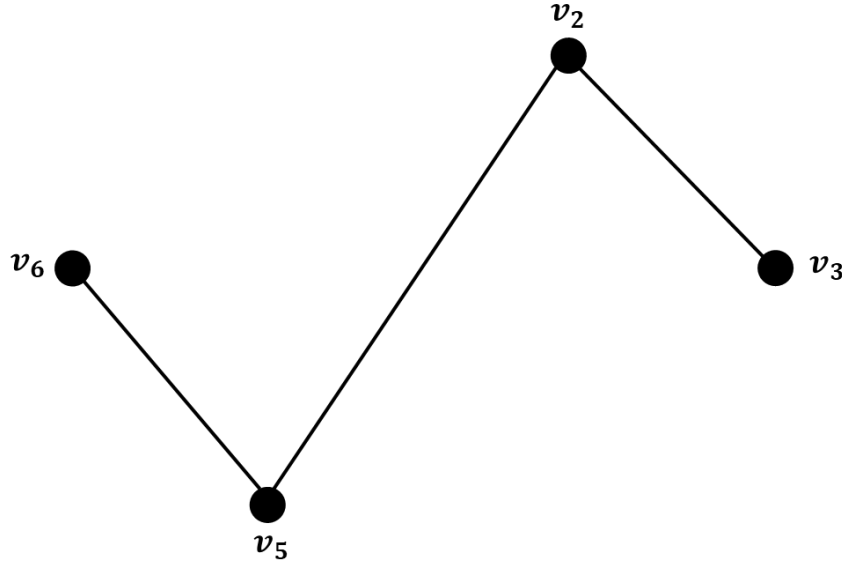


الشكل (1-4)

$|U_t| > 2$ ويكون $f_t \cap U_t = \emptyset$ ، لذا بمقدور Maker تطبيق استراتيجيتها. يبدأ Breaker اللعب ويختار ضلعاً كفيفاً وليكن v_1v_2 ، وبالتالي على Maker أن تتحرك من موضعها الحالي وليكن من v_3 إلى v_2 ، ثم يحين دور Breaker ثانية ويختار ضلعاً كفيفاً (باستثناء v_2v_3) وليكن v_4v_5 ، والآن لا تزال Maker قادرة على تطبيق استراتيجيتها وتتحرك من الرأس v_2 إلى الرأس v_5 (أي الضلع v_2v_5)، بعدها يتحرك Breaker ويختار الضلع v_1v_6 ، ويتوجب على Maker التحرك من موضعها الحالي v_5 إلى الرأس v_6 ، ويقوم Breaker بإنهاء اللعبة واختيار الضلع v_4v_6 ، وهنا لا يوجد مسار من موضع Maker الحالي إلى رأس لم تقوم بزيارته سابقاً على طول ضلع لم يتم اختياره من Breaker، وبالتالي استطاعت Maker أن تزور أربعة رؤوس من ستة، وبأخذها بيانها الشكل التالي:



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية



الشكل (2-4)

إثبات المبرهنة (2): هنا اللاعب Maker غير مقيد بمسار، وإنما تتم حركته وفقاً لمسلك إذ بمقدوره تكرار الرؤوس والأضلاع.

الحد الأدنى: تقوم Maker ببناء شجرة T في جولتها الأولى (وهذا طبيعي؛ لأن البيان مترابط)، وليكن الجذر هو الرأس v_1 عند المستوى 0 . ومن المعلوم إن التعابير (مستوى/أب/ ابن) تتعلق بالجذر. ليكن $v \in T$ وليكن $w = \pi(v)$ (أي أن الرأس w هو أب للرأس v). إذا كانت Maker عند رأس، وليكن x ، ووُجدَ رأس $y \in U_t$ بحيث أن Breaker لم يستدعي بعد الضلع (x, y) فإنّ Maker ستتحرك إلى الرأس y . وليكن $x = \pi(y)$. وبخلاف ذلك، إذا لم توجد حركة ممكنة مثل هذه فإنّ Maker ستتحرك إلى $\pi(x)$ وتُعيد البحث من جديد عن $y \in U_t$ في حركتها التالية. اللعبة تنتهي عندما يجد Maker نفسه عند v_1 وكل الأضلاع بين v_1 و U_t تم أخذها من قبل Breaker.

يفرض أنّ اللعبة تنتهي عندما $|U_t| = k$. وبالتالي فإن اللاعب Maker يكون قد صنع $2(n - k - 1)$ حركة. وذلك لأن كل ضلع من الشجرة T قد تم عبوره مرتين، الأولى من الجهة الأمامية، أما الثانية فمن الجهة الخلفية. كما أنّ Breaker يكون قد كَسِبَ على الأقل $k(n - k)$ ضلع وذلك بين T و U_t . وبالتالي لدينا:

$$k(n - k) \leq 2\alpha(n - k - 1)$$

وينتج من هذا أنّ $k < 2\alpha$. وهذا يبين أنّ Maker يزور على الأقل $n - 2\alpha + 1$ رأس.

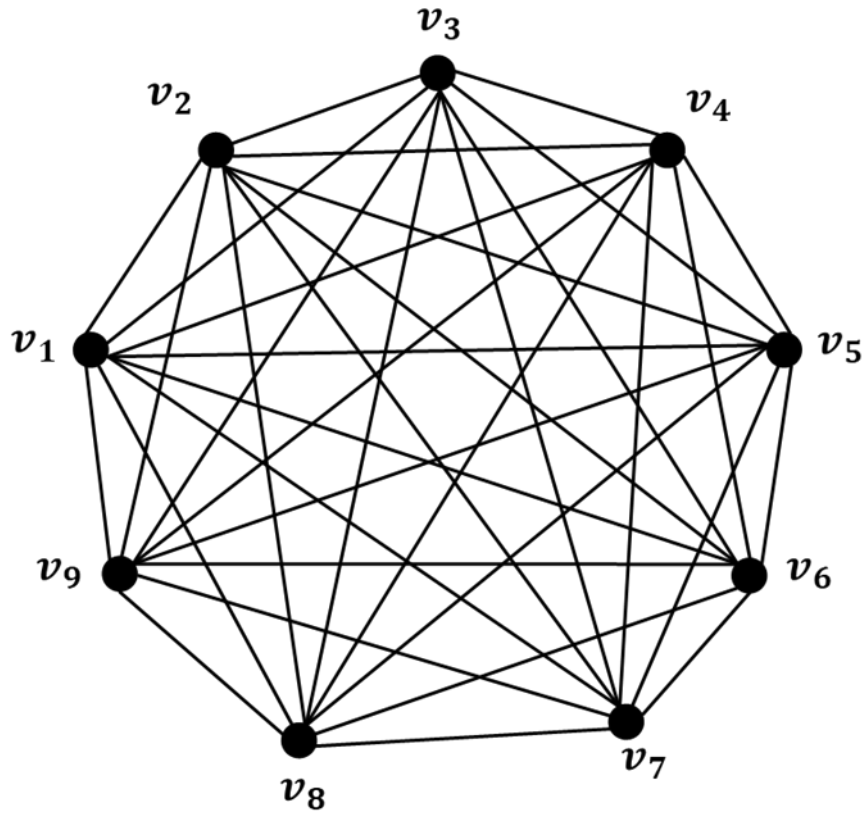
الحد الأعلى: معطيات استراتيجية Breaker على النحو التالي: بفرض أنّ Maker يستهل التحرك أولاً ويستدعي ضلع $\{v_1, v_2\}$ ، أما اللاعب Breaker فيختار رأس w_1 بحيث $w_1 \notin \{v_1, v_2\}$. سيستهلك Breaker، $\frac{n-1}{\alpha}$ حركة مما يجعلنا



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

نتأكد بأن Maker ليس بمقدوره زيارة w_1 . وفي حركة ما، سيقوم Breaker باستدعاء الضلع من الرأس w_1 إلى الرأس v_t ، وهذا عند الضرورة، بالإضافة إلى $\alpha - 1$ ضلع آخر تقع على w_1 . وهذا يأخذ ما يقارب $\frac{n-1}{\alpha}$ حركة. بعد ذلك يقوم Breaker باختيار الرأس، غير المزار، ويعمل على حمايته لئلا تتم زيارته مرة ثانية بنفس الطريقة. وهو يفعل هذا لأجل $w_{\alpha-1}, \dots, w_2, w_1$. وبالإجمال، هذا يصنع على الأقل $(\alpha - 1)[(n - 1)/\alpha]$ حركة، ويترك على الأقل $\lfloor \frac{n-1}{\alpha} \rfloor + 1$ رأس غير مزار. بعدها يقوم Breaker باختيار α رأس غير مزار $y_\alpha, \dots, y_2, y_1$ ، وكل حركة له تتألف من اكتساب ضلع من الأضلاع (v_t, y_i) ، $i = 1, 2, \dots, \alpha$. وهذا يحمي الرؤوس $y_\alpha, \dots, y_2, y_1$ وبالتالي فإن Maker يزور على الأكثر $n - 2\alpha + 1$ رأس. ■

مثال (2.3): ليكن لدينا البيان k ، ولنقم بلعب WM-Br (1: 2) على هذا البيان على النحو التالي:



الشكل (3-4)

يبدأ Breaker اللعب ويختار في كل حركة له ضلعين بشكل كفي، بينما تختار Maker ضلع واحد فقط في كل حركة، وتكون حركتها مقيدة وفق مسلك، تحاول Maker بناء شجرة T وزيارة أكبر عدد ممكن من الرؤوس وتتبع الاستراتيجية الموضحة في الحد الأدنى.

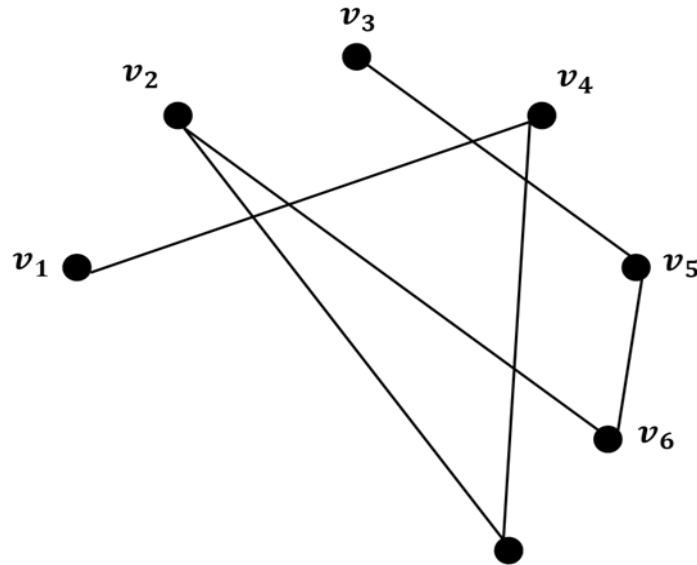


المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

والجدول التالي يبين كامل تحركات اللاعبين حتى الوصول إلى نهاية اللعبة، وتمكن Maker من زيارتها لسبعة رؤوس من اللوحة اللعبة (K_9).

تحركات Maker	تحركات Breaker
v_1v_4	v_1v_2, v_1v_3
v_4v_7	v_4v_5, v_4v_6
v_7v_2	v_7v_8, v_7v_9
v_2v_6	v_2v_5, v_2v_3
v_6v_5	v_6v_8, v_6v_9
v_5v_3	v_5v_8, v_5v_9
	v_3v_8, v_3v_9

ويصبح بيان Maker على النحو التالي:



الشكل (4-4)



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

إثبات المبرهنة (3):

الحد الأدنى: نستهل المناقشة هنا بأسلوب مشابه لما رأيناه في القسم الأول من المبرهنة السابقة. يبني Maker شجرة T على مدار جولته الأولى. وللمرة الثانية فإن الأضلاع بين T و U_T ستكون لـ Breaker. والآن لنفرض أن T لديه k رأس، وبالتالي:

$$2(k - 1) \geq e(T, U_T) \geq k(n - \log_2 k)$$

الحد الأدنى ينتج من مبرهنة Harber [7]، وعليه فإن:

$$\log_2 k \geq n - 2 + \frac{2}{k}$$

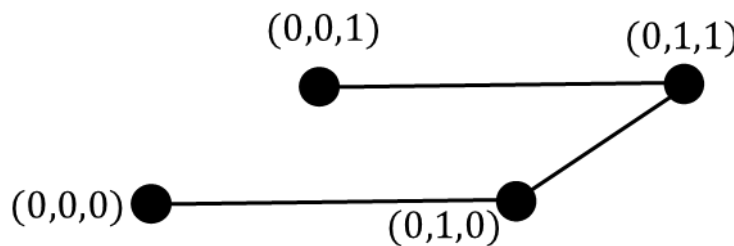
وبالتالي 2^{n-2} رأس على الأقل تكون مأخوذة من قبل Maker.

الحد الأعلى: بفرض أن Maker يبدأ أولاً، وبفرض أنه يبدأ من الرأس $(0,0, \dots, 0)$ وبعجها يتحرك إلى الرأس $(0,1, \dots, 0)$. حيث ان Breaker لن يسمح لخصمه من أخذ أي رأس تكون مركبته الأولى هي 1. عندما يتحرك Maker إلى $(0, x_2, x_3, \dots, x_n)$ ، فإن Breaker يستولي على الضلع $(0, x_2, x_3, \dots, x_n)(1, x_2, x_3, \dots, x_n)$. ويستطيع Maker اكتساب الضلع $(0,0, \dots, 0)(1,0, \dots, 0)$ في حركته الأخيرة، أو ما قبل الأخيرة. وهذا يوضح بأن 2^{n-1} رأس على الأكثر تمت زيارتها من قبل Maker.

مثال (3): ليكن لدينا البيان Q_3 الموضح في الشكل (3-5).

وفقاً للمبرهنة الأخيرة تستطيع Maker زيارة $2^{n-1} = 2^2 = 4$ رأس على الأكثر، ولتكن Maker هي من يبدأ اللعب. ستختار في حركتها الأولى التحرك من الرأس $(0,0,0)$ إلى الرأس $(0,1,0)$ ، ويعمل Breaker على منعها من زيارة أي رأس يبدأ بالمركبة 1، فيختار التحرك من الرأس $(0,1,0)$ إلى الرأس $(1,1,0)$ ، ثم تتحرك Maker من موضعها الأخير إلى الرأس $(0,1,1)$ ، عندها يختار Breaker التحرك من الرأس $(0,1,1)$ إلى الرأس $(1,1,1)$ ، بعد ذلك تتحرك Maker إلى الرأس $(0,0,1)$ ، عندها يختار Breaker التحرك من $(0,0,1)$ إلى $(1,0,1)$ ، ولا تستطيع Maker التحرك إلى الرأس $(0,0,0)$ لأنها تتحرك لبناء شجرة من أضلاعها، وتنتهي اللعبة بزيارتها لأربعة رؤوس من ثمانية رؤوس.

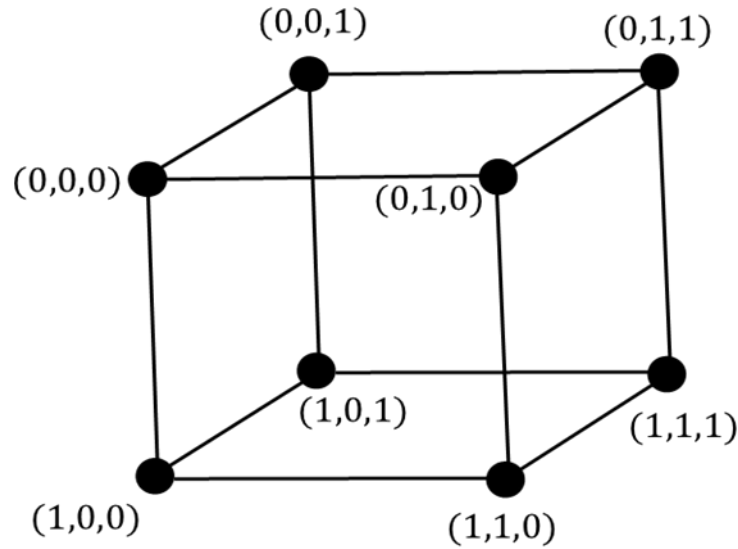
ويصبح بيان Maker على النحو التالي:



الشكل (3-6)



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية



المراجع:

- [1]. P. Erdős AND J. Selfridge, On a combinatorial game, J. Combinatorial Theory Ser. A, 14(1973), pp. 298-301.
- [2]. J. Beck, Combinatorial Games: Tic- Tac- Toe Theory, Cambridge Press, Cambridge, UK, 2008.
- [3]. D. Clemens, T. Tran, Creating in Walker-Breaker games, Discrete Mathematics 339 (8) (2016), 2113-2126.
- [4]. D. Hefetz, M. Krivelevich, M. Stojakovič and T.Szabó, Fast winning strategies in Maker-Breaker games, Journal of Combinatorial Theory Series B 99 (2009), 39-47.
- [5]. D. Hefetz, M. Krivelevich, M. Stojakovič and T.Szabó, Positional Games, Oberwolfach Seminars 44, Birkhäuser/Springer Basel, 2014.
- [6]. D. B. West, Introduction to Graph Theory, Prentice Hall, 2001.
- [7] L. Harper, Optimal numberings and isoperimetric problems on graphs, J. Combinatorial Theory, 1(1966), pp. 385-394.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

[8] L. Espig, A. Frieze, M. Krivelevich, W. Pegden, Walker-Breaker Games, society for Industrial and Applied Mathematics, 29(2015), pp. 1476-1485.