



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

MATHEMATICS' SCOPE

CONTENTS TABLE

Seq.	Title	Authors
1	Combine of Semi-Analytical Methods and Kharrat-Toma transform for Solving System of Integro-Differential Equations	Maamoun Alkourt ² Nasr AL Din Ide, ³ Bachir Nour Kharrat ⁴ Mokhlef Alkourt
2	The Open Mapping in Fuzzy \mathbb{K} -proximity space	Saad Mahdi Jaber ^{1*} , Marwah Yasir Mohsin ²
3	Employ Optimization for Linear Code Decoding	Dr. Ghussoun Ahmad Abdelkareem Al-Jeiroudi
4	Thermodynamical Stress Plane State of the Hooke Body	Dr.Waad Samir Attiah
5	Odd Numbers and Perfect Numbers	Ibrahim Al-horany ¹
6	The Kinetic Elements of the Material Point in its Plane Motion from the View of Neutrosophic Logic	Ahmad youssef Al-Khabour , Dr. Mountajab Al-Hasan
7	Acquiring Topological and Geometric Concepts among First Grade Students Using Cognitive Apprenticeship	Dr. Fatema Al-Alyan



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

8	Mathematical Logic and its Relationship to Academic Achievement in the Subjects of Topology and Geometric Concepts among Students of the mathematics Departments and a Class Teacher	Dr. Fatema Al-Alyan Dr. Reyad Al-Hamido
9	Convert any square numerical matrix to an MARKOV matrix with modulo n	Dr. Mohammad Nur Shamma
10	Solving the Hotdog Problem by Using the Joint Zero-order Finite Hankel - Elzaki Transform	Dr.Roqia Khaled Rdwan ^{1*} Dr.Mohammed Mahmoud Amer ²
11	Temporal Supra and Infra Topological Spaces	Riad K. Al-Hamido
12	A study in analysis matrices into the product of special matrices	Reem Nayef Al-Ahmad Dr. Abdulbasit Al-khatib Dr. Basel Al-arnous
13	أشجار الفيثاغوريات الأولية (دراسة مرجعية)	ريم الزيتون, الدكتور باسل العرنوس, الدكتور محمد شرباتي
14	APPLYING A LINEAR TRANSFORM TO THE LORENZ 4D SYSTEM	سالم سالم
15	طمر كمون ريس في الفضاء (RIS) والخصائص التكاملية لفضاءات الكمون	
16	متباينة ميلاس على زمرة هايزنبرغ	د. سهى علي سلامه



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

17	Study the properties of the internal keys in the Pythagorean circuit and their use in encryption	Prof. Abdulbasit Alkhatib Prof. Mohammad Nour Shamma
18	Dynamical Behavior of an Ecological System with Diverse Functional Response	Saba Noori Majeed ¹
19	دراسة حركية وتحريكية لمنظومة مستوية مولدة بالآلية السباعية	علاء خروف, د. مصطفى الحسن
20	SEIDRA model for epidemics: study and numerical solutions using Mathematica	Dr. Imad Fattash
21	Finding the solution to the Dirichlet Problem for the Laplace equation in some special domains using conformal mapping	Fatima Omar ALshmsini, Dr . Mohamad Charabati, Dr. Basel Al-arnous
22	The Importance of Neutrosophic logic as a Tool in Educational and Psychological Research	Muhammad Almusa AlSaleh*Hiba Rakan Al- Ali**Manar Hasan Al Khader***
23	اختبار أنصاف الأقطار الفيثاغورية R واستنتاج النقاط الفيثاغورية المحيطة	مريم خالد النديوي, (2) أ.د. عبد الباسط الخطيب (3) أ.د. محمد نور شمه
24	دراسة لعبة Maker-Breaker الموضوعية على بيانات خاصة	د. هديل برباره ² , د. رياض الحميدو ³ , مالك الخضير ⁴



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

PHYSICS SCOPE

CONTENTS TABLE

Seq.	Title	Authors
1	Comparing the Concentrations of Chromium, Iron and Manganese in the Serum of Prostate Cancer with the Control	Shaymaa Awad Kadhim ¹ , Allawi Hamead Harjan ² , Ahmed Ali Ghali Al-Khayfawee ³ , Noor Ali Jaafar Al-Quraishi ⁴ , Naeema Hadi Ali ⁵
2	Finite difference time domain as a tool to solve light interaction problems	Dana .S.Akil
3	ديناميكيات تغيرات سبين نواة ⁵⁷ Fe باستخدام مطيافية ميوسبور	د. مصطفى ديلو
4	الأثر الحراري لأيونات الهيليوم الصادرة عن جهاز AECS-PF1 البلازما المحرقة الكثيفة	أ.د. وليد صهيوني د. علاء ناصيف
5	Calculation the Hartree-Fock Energies for Ten Electron Systems (Ne , Na ⁺¹ , Mg ⁺² , Al ⁺³)	Qassim Shamkhi AL-Khafaji ¹ , Ameer F. Shamkhi ² , shaymaa awad kadhim ³ , Inass Abdulah Zgair ⁴ , Hayder H. Hussein ⁵ , Maryam Hakim AL-Quraishi ⁶
6	Cd _{1-x} Zn _x S composites thin films: synthesis and characterization	Hamsa N. Naser ^a , Wasan M. Mohamed ^b , Jinan A. Abd ^c , and Asmahan A. Muhmood ^d



7	دراسة تغيرات الإشعاع الشمسي الكلي والإشعاع فوق البنفسجي في مدينة حلب خلال العام 2020	ا.م. حسين العلي
8	دراسة توجيهات البلورات السائلة لمركب SDS بواسطة التجاوب المغناطيسي النووي NMR	د. عبد الرزاق الصوفي

[11] Commented

COMPUTER SCOPE

TABLE CONTENTS

Seq.	Title	Authors
1	Automated medicinal and aromatic plants using GIS (with a preconceived knowledge)	Dr. Mahmoud Diaf AL-Mohamed
2	Computerized Numerical Modeling Using Computational Fluid Dynamics Methodology to Study Inclined Plates in a Sedimentation Basin for Water Treatment	Dr. Tasnim Mkresh
3	Exploring The Engagement of Students with Artificial Intelligence Shock : A Case Study At Junior High School In Jakarta,Indonesia	Maram Taher, Dr. Rini Triastuti, Dr.Mohammad Muchtarom
4	Congestion Control Mechanisms in Internet of Things: A Review of Current Techniques	Zaynab Saeed Hameed ¹ , Mohammed Arif Nadhom Obaid Al-agar ¹ , Zahraa Abbas Hassan ¹



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

5	Review: Information Security Based on Steganography and Cryptography	Suhair Mohammed Zeki Abd Alsammed ¹ , Shaima Mohammed Ali ² , Maisa'a Abid Ali Khodher ³
---	--	---

STATISTICS' SCOPE

TABLE CONTENTS

Seq.	Title	Authors
1	On Mathematical Expectation of the Sample Variance in Simple Sampling Technique	Yasser Al Zaim



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

MATHEMATICS' SCOPE

Combine of Semi-Analytical Methods and Kharrat-Toma transform for Solving System of Integro-Differential Equations

¹Maamoun Alkourt ² Nasr AL Din Ide

³ Bachir Nour Kharrat ⁴ Mokhlef Alkourt

¹PhD Student, Department of Mathematics, Faculty of science, University of Aleppo, Aleppo, Syria. maamounalkourt04@gmail.com

²Professor in Department of Mathematics, Faculty of science, University of Aleppo, Aleppo, Syria. ide1112002@yahoo.ca

³Professor in Department of Mathematics, Faculty of science, University of Aleppo, Aleppo, Syria. Bachir.kharat@gmail.com

⁴MA, Department of Mathematics, Faculty of science, University of Aleppo, Aleppo, Syria.

Mokhlefalkourt02@gmail.com

Abstract: In this work, we apply Combined Kharrat-Toma transform-Adomian Decomposition Method (KTT-ADM) with Combined Kharrat-Toma transform-Variational Iteration Method (KTT -VIM) to solve the system of nonlinear Volterra integro-differential equations. We have obtained the exact solutions of these equations; several examples are illustrated to test the power and efficiency of the proposed methods. Further, the obtained results of the hybrid approach are implemented in Maple software.

The Open Mapping in Fuzzy \mathbb{K} -proximity space

Saad Mahdi Jaber ^{3*}, Marwah Yasir Mohsin²

¹Department of Mathematics, Faculty of Education for Pure Science



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

University of Wasit, Wasit, Iraq

²Department of Mathematics, Directorate-General of Education of Wasit, Wasit, Iraq

Abstract

In this paper, we define a fuzzy \mathbb{K} -proximally Open Mapping. The properties of this mapping and its relationship with other types of maps were also studied.

Keywords fuzzy set, fuzzy proximally space and fuzzy proximally mapping.

دالة التقريب الضبابية المفتوحة

سعد مهدي جابر أبورغيف^{1*}, مروة ياسر محسن²

¹قسم الرياضيات، كلية التربية للعلوم الصرفة، جامعة واسط، واسط، العراق

²قسم الرياضيات، مديرية التربية في واسط، واسط، العراق

الخلاصة

في هذه الورقة وضمن نطاق الفضاء الضبابي قدمنا تعريفاً لدالة التقريب الضبابي المفتوحة كما قمنا بدراسة خصائص هذه الدالة وعلاقتها بأنواع الدوال الأخرى.

1. Introduction

The concept of fuzzy set was introduced by Zadeh in his classical paper [1]. In 1974, Chang [2] defined fuzzy topology. In 1979, Katsaras [3] introduced the notion of fuzzy proximities, on the base of the axioms suggested by Efremovic [4].

2. Preliminaries

In this paper \mathbb{W} denote a nonempty set and $I^{\mathbb{W}}$ is the collection of all fuzzy set. $f: (\mathbb{W}, \mathcal{S}_{\mathbb{W}}) \rightarrow (\mathbb{M}, \mathcal{S}_{\mathbb{M}})$ (or $f: \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{M}$) means a mapping f from a fuzzy \mathbb{K} -proximity space \mathbb{W} to a fuzzy \mathbb{K} -proximity space \mathbb{M} . For any two fuzzy sets m and nn in \mathbb{W} , $m \vee nn$ and $m \wedge nn$ defined as followings: For any $a \in \mathbb{W}$, $(m \vee nn)(a) = \sup \{m(a), nn(a)\}$ and $(m \wedge nn)(a) = \inf \{m(a), nn(a)\}$, respectively. And $m \leq nn$ if for each $a \in \mathbb{W}$, $m(a) \leq nn(a)$. m^c is the complement of a fuzzy set m in \mathbb{W} defined by $m^c = 1 - m$. The constant maps all of \mathbb{W} to 0 and 1 denoted by 0 and 1, respectively. A fuzzy point a_{β} in \mathbb{W} is a fuzzy set defined by $a_{\beta} = 0$ for all $b \in \mathbb{W}$ except one, called $a \in \mathbb{W}$ such that $a_{\beta} = \beta$, where $0 < \beta < 1$, we say a_{β} belong to m denoted by



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$a_\beta \in \mathfrak{m}$, if $\beta \leq \mathfrak{m}(a)$, for any $a \in \mathbb{W}$. Evidently, every fuzzy set \mathfrak{m} can be expressed as the union of all the fuzzy points which belong to \mathfrak{m} .

his paper was an attempt to give the most important properties of the fuzzy \mathbb{K} -proximally open mapping.

Definition 2.1 [2]: A subset \mathcal{S} of $I^{\mathbb{W}}$ is called fuzzy topology on \mathbb{W} if the following statements are complete:

- $0, 1 \in \mathcal{S}$;
- If $\mathfrak{m}, \mathfrak{m}\mathfrak{n} \in \mathcal{S}$, then $\mathfrak{m} \wedge \mathfrak{m}\mathfrak{n} \in \mathcal{S}$;
- If $\mathfrak{m}_i \in \mathcal{S}$, then $\sup_{i \in \Delta} \mathfrak{m}_i \in \mathcal{S}$, for each $i \in \Delta$.

We say the pair $(\mathbb{W}, \mathcal{S})$ is a fuzzy topological space, of its for short. •

Definition 2.2 [3]: A relation \mathcal{S} on $I^{\mathbb{W}}$ is called a fuzzy proximity if the following statements are complete:

- C1- If $\mathfrak{m} \mathcal{S} \mathfrak{m}\mathfrak{n}$ then $\mathfrak{m}\mathfrak{n} \mathcal{S} \mathfrak{m}$;
- C2- $(\mathfrak{m} \vee \mathfrak{m}\mathfrak{n}) \mathcal{S} \mathfrak{k}$ if and only if $\mathfrak{m} \mathcal{S} \mathfrak{k}$ or $\mathfrak{m}\mathfrak{n} \mathcal{S} \mathfrak{k}$;
- C3- If $\mathfrak{m} \mathcal{S} \mathfrak{m}\mathfrak{n}$ then $\mathfrak{m} \neq 0$ and $\mathfrak{m}\mathfrak{n} \neq 0$;
- C4- If $\mathfrak{m} \bar{\mathcal{S}} \mathfrak{m}\mathfrak{n}$, then $\exists \mathfrak{k} \in I^{\mathbb{W}} \ni \mathfrak{m} \bar{\mathcal{S}} \mathfrak{k}$ and $(1 - \mathfrak{k}) \bar{\mathcal{S}} \mathfrak{m}\mathfrak{n}$;
- C5- If $\mathfrak{m} \wedge \mathfrak{m}\mathfrak{n} \neq 0$ then $\mathfrak{m} \mathcal{S} \mathfrak{m}\mathfrak{n}$.

We say the pair $(\mathbb{W}, \mathcal{S})$ is a fuzzy proximity space.

Definition 2.3 [6]: A relation \mathcal{S} on $I^{\mathbb{W}}$ is called a fuzzy \mathbb{K} -proximity if the following statements are complete:

- S1- $a_\beta \mathcal{S} (\mathfrak{m} \vee \mathfrak{m}\mathfrak{n})$ if and only if $a_\beta \mathcal{S} \mathfrak{m}$ or $a_\beta \mathcal{S} \mathfrak{m}\mathfrak{n}$;
- S2- $a_\beta \bar{\mathcal{S}} 0$ for all a_β ;
- S3- If $a_\beta \in \mathfrak{m}$ then $a_\beta \mathcal{S} \mathfrak{m}$;
- S4- If $a_\beta \bar{\mathcal{S}} \mathfrak{m}$ then $\exists \mathfrak{k} \in I^{\mathbb{W}} \ni a_\beta \bar{\mathcal{S}} \mathfrak{k}$ and $b_\beta \bar{\mathcal{S}} \mathfrak{m}$ for all $b_\beta \in (1 - \mathfrak{k})$.

We say the pair $(\mathbb{W}, \mathcal{S})$ is a fuzzy \mathbb{K} -proximity space.

Notes:



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

1- Clear that the fuzzy proximity on $I^{\mathbb{W}}$ implies the fuzzy \mathbb{K} -proximity on $I^{\mathbb{W}}$.

2- The pairs $(\mathbb{W}, \mathcal{S})$ and $(\mathbb{M}, \mathcal{S})$ we mean in the next stage of this paper is the fuzzy \mathbb{K} -proximity space.

Definition 2.4 [6]: A fuzzy \mathbb{K} -proximity \mathcal{S} on $I^{\mathbb{W}}$ is called discrete \mathbb{K} -proximity, if we define $a_{\beta} \mathcal{S} m$ if and only if $a_{\beta} \wedge m \neq 0$.

Definition 2.5: Let $(\mathbb{W}, \mathcal{S})$ be a fuzzy proximity space. A fuzzy set $m \in I^{\mathbb{W}}$ is called FS-closed if $a_{\beta} \mathcal{S} m \rightarrow a_{\beta} \in m$.

Definition 2.6: Let $(\mathbb{W}, \mathcal{S})$ be a fuzzy proximity space, then the family $\tau_{\mathcal{S}} = \{m \in I^{\mathbb{W}} : (1 - m) \text{ is FS-closed}\}$ is called fuzzy topology induced by \mathcal{S} .

Definition 2.7: Let $(\mathbb{W}, \mathcal{S})$ be a \mathbb{K} -proximity space and $m \in I^{\mathbb{W}}$, a \mathcal{S} -closure of m (briefly $\bar{m}^{\mathcal{S}}$) and \mathcal{S} -interior of m (briefly $m^{o\mathcal{S}}$) are defined as:

$$\bar{m}^{\mathcal{S}} = \bigwedge \{mm : m \leq mm, mm \text{ is FS-closed}\}$$

$$m^{o\mathcal{S}} = \bigvee \{mm : mm \leq m, (1 - mm) \text{ is FS-closed}\}$$

Theorem 2.7 [7]: Let $(\mathbb{W}, \mathcal{T})$ be a fuzzy topological space and \mathcal{S} is a binary relation defined by $a_{\beta} \mathcal{S}_{\mathbb{W}} m$ if and only if $a_{\beta} \in \bar{m}^{\mathcal{S}}$, then \mathcal{S} is a fuzzy \mathbb{K} -proximity on $I^{\mathbb{W}}$ and the fuzzy topology $\tau_{\mathcal{S}}$ induced by \mathcal{S} is the given topology \mathcal{T} .

Definition 2.8 [7]: Let m and mm be a fuzzy set in \mathbb{K} -proximity space $(\mathbb{W}, \mathcal{S})$. Then we say that m and mm are in the relation \ll and write $m \ll mm$ if $m \bar{\mathcal{S}} (1 - mm)$.

Proposition 2.9: Let $(\mathbb{W}, \mathcal{S}_{\mathbb{W}})$ be a fuzzy \mathbb{K} -proximity space. If $mm \ll m$, then $\exists k \in I^{\mathbb{W}}$ such that $mm \ll k \ll m$.

Proof: Let $mm \ll m$, then $mm \bar{\mathcal{S}}_{\mathbb{W}} (1 - m)$. So, $\exists k \in I^{\mathbb{W}}$ such that $mm \bar{\mathcal{S}}_{\mathbb{W}} (1 - k)$ and $k \bar{\mathcal{S}}_{\mathbb{W}} (1 - m)$. So, $mm \ll k$ and $k \ll m$.

Definition 2.10 [7]: A mapping $f: (\mathbb{W}, \mathcal{S}_{\mathbb{W}}) \rightarrow (\mathbb{M}, \mathcal{S}_{\mathbb{M}})$ is said to be fuzzy proximally mapping (FS-continuous) if $a_{\beta} \mathcal{S}_{\mathbb{W}} m$ implies $f(a_{\beta}) \mathcal{S}_{\mathbb{M}} f(m)$.

Equivalently, $f: \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{M}$ is said to be FS-continuous if $b_{\beta} \bar{\mathcal{S}}_{\mathbb{M}} mm$ implies $f^{-1}(b_{\beta}) \bar{\mathcal{S}}_{\mathbb{W}} f^{-1}(mm)$ or $b_{\beta} \ll mm$ implies $f^{-1}(b_{\beta}) \ll f^{-1}(mm)$.

Definition 2.11 [7]: A fuzzy set m in \mathbb{K} -proximity space $(\mathbb{W}, \mathcal{S})$ is called \mathcal{S} -neighborhood of a fuzzy point a_{β} (in symbols $a_{\beta} \ll m$) if $a_{\beta} \bar{\mathcal{S}} (1 - m)$.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 آب 2024
دمشق - سورية

Definition 2.12 [7]: Let \mathcal{S}_1 and \mathcal{S}_2 be two \mathbb{K} -proximity on \mathbb{W} , then we define $\mathcal{S}_2 > \mathcal{S}_1$ if $a_\beta \mathcal{S}_1 \mathfrak{m}$ implies $a_\beta \mathcal{S}_2 \mathfrak{m}$ (we say that \mathcal{S}_1 is finer than \mathcal{S}_2 or \mathcal{S}_2 is coarser than \mathcal{S}_1).

Fuzzy \mathbb{K} -proximities Open Mapping

Definition 3.1: A mapping f from $(\mathbb{W}, \mathcal{S}_{\mathbb{W}})$ into $(\mathbb{M}, \mathcal{S}_{\mathbb{M}})$ is said to be fuzzy \mathbb{K} -proximity open (FS -open) if $b_\beta \mathcal{S}_{\mathbb{M}} \mathfrak{m}$ implies $a_\beta \mathcal{S}_{\mathbb{W}} \mathfrak{m}$, where $b_\beta = f(a_\beta)$, $\mathfrak{m} = 1 - f(1 - \mathfrak{m})$ and $\mathfrak{m} \neq 0$.

Equivalently, $f: \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{M}$ is said to be FS -open if $a_\beta \bar{\mathcal{S}}_{\mathbb{W}} \mathfrak{m}$ implies $b_\beta \bar{\mathcal{S}}_{\mathbb{M}} \mathfrak{m}$ or $a_\beta \ll 1 - \mathfrak{m}$ implies $b_\beta \ll 1 - \mathfrak{m}$. where $b_\beta = f(a_\beta)$ and $\mathfrak{m} = 1 - f(1 - \mathfrak{m})$ and $\mathfrak{m} \neq 0$.

Proposition 3.2: Let $f: (\mathbb{W}, \mathcal{S}_{\mathbb{W}}) \rightarrow (\mathbb{M}, \mathcal{S}_{\mathbb{M}})$ be FS -open and injective mapping, then f is a fuzzy open with respect to the fuzzy topologies $\tau_{\mathcal{S}_{\mathbb{W}}}$ and $\tau_{\mathcal{S}_{\mathbb{M}}}$.

Proof: Let $b_\beta \in f((\mathfrak{m})^{o\mathcal{S}}) = f(1 - \overline{(1 - \mathfrak{m}^\mathcal{S})})$, where $b_\beta = f(a_\beta)$ then $b_\beta \in 1 - f(1 - \mathfrak{m}^\mathcal{S})$ i.e. $b_\beta \notin f(1 - \overline{\mathfrak{m}^\mathcal{S}})$, thus $a_\beta \notin (1 - \overline{\mathfrak{m}^\mathcal{S}})$ and $a_\beta \bar{\mathcal{S}}_{\mathbb{W}} (1 - \mathfrak{m})$. Since f is FS -open, then $f(a_\beta) \bar{\mathcal{S}}_{\mathbb{M}} 1 - f(\mathfrak{m})$, that is $f(a_\beta) \notin (1 - \overline{f(\mathfrak{m}^\mathcal{S})})$ and $f(a_\beta) \in 1 - \overline{(1 - f(\mathfrak{m}^\mathcal{S}))^\mathcal{S}}$ implies $f(a_\beta) \in (f(\mathfrak{m}))^{o\mathcal{S}}$, this prove $f((\mathfrak{m})^{o\mathcal{S}}) \subseteq (f(\mathfrak{m}))^{o\mathcal{S}}$. Hence the mapping f is fuzzy open.

Proposition 3.3: The composition of FS -open maps is FS -open.

Proof: Clear

Proposition 3.4: Let \mathcal{S}_1 and \mathcal{S}_2 be two \mathbb{K} -proximity on \mathbb{W} , then the identity mapping $i: (\mathbb{W}, \mathcal{S}_1) \rightarrow (\mathbb{W}, \mathcal{S}_2)$ is FS -open if and only if $\mathcal{S}_1 > \mathcal{S}_2$.

Proof: Let $a_\beta \mathcal{S}_2 \mathfrak{m}$, then $a_\beta \mathcal{S}_1 \mathfrak{m}$, from definition of fuzzy identity mapping $\mathfrak{m} = 1 - (1 - f^{-1}(\mathfrak{m})) = \mathfrak{m}$ so, $a_\beta \mathcal{S}_1 \mathfrak{m}$. Hence, $\mathcal{S}_1 > \mathcal{S}_2$.

Proposition 3.5: A bijective mapping $f: (\mathbb{W}, \mathcal{S}_{\mathbb{W}}) \rightarrow (\mathbb{M}, \mathcal{S}_{\mathbb{M}})$ is FS -open if and only if $f^{-1}: (\mathbb{M}, \mathcal{S}_{\mathbb{M}}) \rightarrow (\mathbb{W}, \mathcal{S}_{\mathbb{W}})$ is FS -continuous.

Proof: Let $b_\beta \mathcal{S}_{\mathbb{M}} \mathfrak{m}$, then $a_\beta \mathcal{S}_{\mathbb{W}} \mathfrak{m}$ where $b_\beta = f(a_\beta)$ and $\mathfrak{m} = 1 - f(1 - \mathfrak{m})$, since f is injective then $\mathfrak{m} = f(\mathfrak{m})$ and $\mathfrak{m} = f^{-1}(\mathfrak{m})$, that is $f^{-1}(b_\beta) \mathcal{S}_{\mathbb{W}} f^{-1}(\mathfrak{m})$.

Conversely, Let $b_\beta \mathcal{S}_{\mathbb{M}} \mathfrak{m}$, then $f^{-1}(b_\beta) \mathcal{S}_{\mathbb{W}} f^{-1}(\mathfrak{m})$. Since f is bijective, then there exists a_β and \mathfrak{m} in $I^{\mathbb{W}}$ s.t $x_\gamma = f^{-1}(b_\beta)$ and $\mathfrak{m} = f^{-1}(\mathfrak{m})$. Thus, $a_\beta \mathcal{S}_{\mathbb{W}} \mathfrak{m}$, where $b_\beta = f(a_\beta)$ and $\mathfrak{m} = f(\mathfrak{m}) = 1 - f(1 - \mathfrak{m})$.

Definition 3.6: Let $(\mathbb{W}, \mathcal{S}_D)$ be a fuzzy proximity space. A proximity \mathcal{S}_D is called discrete if we define $\mathfrak{m} \mathcal{S}_D \mathfrak{m}$ if and only if $\mathfrak{m} \wedge \mathfrak{m} \neq 0$.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

Proposition 3.7: An injective mapping $f: (\mathbb{W}, \mathcal{S}_{\mathbb{W}}) \rightarrow (\mathbb{M}, \mathcal{S}_{\mathbb{M}})$ is FS -open if $\mathcal{S}_{\mathbb{M}}$ is a discrete \mathbb{K} -proximity on $I^{\mathbb{M}}$.

Proof: Let $b_{\beta} \mathcal{S}_{\mathbb{M}} \mathbb{m}$ then $f(a_{\beta}) \wedge 1 - f(1 - \mathbb{m}) \neq 0$ where $b_{\beta} = f(a_{\beta})$ and $\mathbb{m} = 1 - f(1 - \mathbb{m})$, but f is injective then $f(\mathbb{m}) = 1 - f(1 - \mathbb{m})$ and $a_{\beta} \wedge \mathbb{m} \neq 0$, thus $a_{\beta} \mathcal{S}_{\mathbb{M}}$. Hence f is FS -open.

Definition 3.8: A mapping f from $(\mathbb{W}, \mathcal{S}_{\mathbb{W}})$ into $(\mathbb{M}, \mathcal{S}_{\mathbb{M}})$ is said to be fuzzy \mathbb{K} -proximity closed (FS -closed) if $b_{\beta} \mathcal{S}_{\mathbb{M}} \mathbb{m}$ implies $a_{\beta} \mathcal{S}_{\mathbb{W}} \mathbb{m}$, where $b_{\beta} = f(a_{\beta})$, $\mathbb{m} = f(\mathbb{m})$ and $\mathbb{m} \neq 0$.

Equivalently, $f: \mathbb{W} \rightarrow \mathbb{M}$ is said to be FS -closed if $a_{\beta} \bar{\mathcal{S}}_{\mathbb{W}} \mathbb{m}$ implies $b_{\beta} \bar{\mathcal{S}}_{\mathbb{M}} \mathbb{m}$ or $a_{\beta} \ll 1 - \mathbb{m}$ implies $b_{\beta} \ll 1 - \mathbb{m}$ where $b_{\beta} = f(a_{\beta})$, $\mathbb{m} = f(\mathbb{m})$ and $\mathbb{m} \neq 0$.

Proposition 3.9: An injective mapping $f: (\mathbb{W}, \mathcal{S}_{\mathbb{W}}) \rightarrow (\mathbb{M}, \mathcal{S}_{\mathbb{M}})$ is FS -closed if and only if it is $\mathcal{S}_{\mathbb{M}}$ is a fuzzy \mathbb{K} -proximity on $I^{\mathbb{M}}$.

Proof: Let $b_{\beta} \mathcal{S}_{\mathbb{M}} \mathbb{m}$, then $a_{\beta} \mathcal{S}_{\mathbb{W}} \mathbb{m}$ where $b_{\beta} = f(a_{\beta})$ and $\mathbb{m} = 1 - f(1 - \mathbb{m})$, since f is injective then $\mathbb{m} = f(\mathbb{m})$, that is FS -closed.

Theorem 3.10: Let f be a injective mapping from a fuzzy \mathbb{K} -proximity space $(\mathbb{W}, \mathcal{S}_{\mathbb{W}})$ into Y , the coarsest fuzzy \mathbb{K} -proximity $\mathcal{S}_{\mathbb{M}}$ which be assigned to \mathbb{M} in order that f be fuzzy \mathbb{K} -proximally open is defined by $b_{\beta} \bar{\mathcal{S}}_{\mathbb{M}} \mathbb{m}$ if and only if there exists $\mathbb{m}^* \in I^{\mathbb{W}}$ s.t $a_{\beta} \bar{\mathcal{S}}_{\mathbb{W}} (1 - \mathbb{m}^*)$ and $f(\mathbb{m}^*) \in 1 - \mathbb{m}$, where $b_{\beta} = f(a_{\beta})$, $\mathbb{m} = f(\mathbb{m})$.

Proof: First, we must prove that $\mathcal{S}_{\mathbb{M}}$ is a fuzzy \mathbb{K} -proximity on \mathbb{M} .

K1- Let $b_{\beta} \bar{\mathcal{S}}_{\mathbb{M}} (\mathbb{m}_1 \vee \mathbb{m}_2)$, then there exists $\mathbb{m}^* \in I^{\mathbb{W}}$ s.t. $a_{\beta} \bar{\mathcal{S}}_{\mathbb{W}} (1 - \mathbb{m}^*)$ and $f(\mathbb{m}^*) \in 1 - \mathbb{m}_1 \vee \mathbb{m}_2$, where $b_{\beta} = f(a_{\beta})$, $\mathbb{m}_1 \vee \mathbb{m}_2 = 1 - f(1 - \mathbb{m})$ from which $b_{\beta} \bar{\mathcal{S}}_{\mathbb{M}} \mathbb{m}_1$ and $b_{\beta} \bar{\mathcal{S}}_{\mathbb{M}} \mathbb{m}_2$. follow. If $b_{\beta} \bar{\mathcal{S}}_{\mathbb{M}} \mathbb{m}_1$ and $b_{\beta} \bar{\mathcal{S}}_{\mathbb{M}} \mathbb{m}_2$. then there exists $\mathbb{m}_1^*, \mathbb{m}_2^* \in I^{\mathbb{W}}$ s.t. $a_{\beta} \bar{\mathcal{S}}_{\mathbb{W}} (1 - \mathbb{m}_1^*)$, $a_{\beta} \bar{\mathcal{S}}_{\mathbb{W}} (1 - \mathbb{m}_2^*)$ and $f(\mathbb{m}_1^*) \in 1 - \mathbb{m}_1$, $f(\mathbb{m}_2^*) \in 1 - \mathbb{m}_2$, then $b_{\beta} \bar{\mathcal{S}}_{\mathbb{M}} (1 - (\mathbb{m}_1^* \vee \mathbb{m}_2^*))$ and $f(\mathbb{m}_1^* \vee \mathbb{m}_2^*) \in 1 - (\mathbb{m}_1 \vee \mathbb{m}_2)$, that is $b_{\beta} \bar{\mathcal{S}}_{\mathbb{M}} (\mathbb{m}_1 \vee \mathbb{m}_2)$.

K2- $b_{\beta} \bar{\mathcal{S}}_{\mathbb{M}} 0$ is clear for all b_{β} .

K3- If $b_{\beta} \bar{\mathcal{S}}_{\mathbb{M}} \mathbb{m}$, then there exists $\mathbb{m}^* \in I^{\mathbb{W}}$ s.t. $a_{\beta} \bar{\mathcal{S}}_{\mathbb{W}} (1 - \mathbb{m}^*)$ and $f(\mathbb{m}^*) \in 1 - \mathbb{m}$. Thus $a_{\beta} \notin (1 - \mathbb{m}^*)$ and then $b_{\beta} \notin 1 - f(\mathbb{m}^*)$ also $b_{\beta} \in 1 - \mathbb{m}$, this prove that $b_{\beta} \notin \mathbb{m}$.

K4- If $b_{\beta} \bar{\mathcal{S}}_{\mathbb{M}} \mathbb{m}$, then there exists $\mathbb{m}^* \in I^{\mathbb{W}}$ s.t. $a_{\beta} \bar{\mathcal{S}}_{\mathbb{W}} (1 - \mathbb{m}^*)$ and $f(\mathbb{m}^*) \in 1 - \mathbb{m}$. Since $\mathcal{S}_{\mathbb{W}}$ satisfies condition (K4), then there exists $\mathbb{m} \in I^{\mathbb{W}}$ s.t. $a_{\beta} \bar{\mathcal{S}}_{\mathbb{W}} \mathbb{m}$ and $a_{\beta}^* \bar{\mathcal{S}}_{\mathbb{W}} (1 - \mathbb{m}^*)$ for all $a_{\beta}^* \in 1 - \mathbb{m}$. Assume $f(\mathbb{m}) = \rho$ then $b_{\beta} \bar{\mathcal{S}}_{\mathbb{M}} \mathbb{m}$, since $a_{\beta}^* \bar{\mathcal{S}}_{\mathbb{W}} (1 - \mathbb{m}^*)$ and $\mathbb{m}^* \in$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 آب 2024
دمشق - سورية

$f^{-1}(f(m^*)) \in 1 - f^{-1}(mm)$, then $(1 - m)\bar{\delta}_W f^{-1}(mm)$ which implies $(1 - f(m))\bar{\delta}_Y mm$ i.e. $b_\beta^* \bar{\delta}_M mm$ for all $b_\beta^* \in (1 - \rho)$.

Now, to show that $f: (W, \mathcal{S}_W) \rightarrow (M, \mathcal{S}_M)$ is fuzzy \mathbb{K} -proximally open. Suppose that $a_\beta \bar{\delta}_W m$ i.e. $a_\beta \ll 1 - m$ by proposition (2.9) then there exists $m^* \in I^W$ s.t $a_\beta \ll m^* \ll 1 - m$. Thus, $a_\beta \bar{\delta}_W m^*$ and $m^* \bar{\delta}_W m$ that is $m^* \in 1 - m$, if $mm = f(m)$ then $f(m^*) \in 1 - mm$, by assumption $b_\beta \bar{\delta}_M mm$ and this prove that f is $\mathcal{F}\mathcal{S}$ -open.

It remains to show that \mathcal{S}_M coarsest fuzzy \mathbb{K} -proximity. Let $\bar{\mathcal{S}}_M$ be any fuzzy \mathbb{K} -proximally on M s.t $f: (W, \mathcal{S}_W) \rightarrow (M, \mathcal{S}_M)$ is fuzzy \mathbb{K} -proximally open mapping. If $b_\beta \bar{\delta}_M mm$, then there exists $m^* \in I^W$

s.t. $a_\beta^* \bar{\delta}_W (1 - m^*)$ and $f(m^*) \in 1 - mm$. Since f is $\mathcal{F}\mathcal{S}$ -open then $b_\beta \bar{\delta}_M (1 - f(m^*))$ but $mm \in 1 - f(m^*)$, then $b_\beta \bar{\delta}_M mm$, hence $\mathcal{S}_M < \bar{\mathcal{S}}_M$.

Conclusions and future studies

The result of this paper initiated was the definition of the fuzzy \mathbb{K} -proximity open mapping and relationship with fuzzy \mathbb{K} -proximity continuous. In addition, new fuzzy a \mathbb{K} -proximity relation was defined on the basis of this mapping. In the future it is possible to link this mapping to the fuzzy \mathbb{K} -proximity compact.

ACKNOWLEDGMENT

We should like to thank all those who participated in one way or another in the achievement of this work.

REFERENCES

- [1] L.A. Zadah, *Fuzzy sets*, Informs. Contr.8 (1965), 333-353.
- [2] C.L. Chang, *Fuzzy topological space*, J. Math. Anal.Appl. 24 (1968), 182-190.
- [3] A. K. Katsaras, *Fuzzy proximity spaces*, J. Math. Anal.Appl. 68 (1979), 100-110.
- [4] P-M. Pu- and Y-M. Lin, *Fuzzy topology I*, J. Math. Anal. Appl. 76 (1980), 571-599.
- [5] C. K. Wong, *Fuzzy points and Local properties of fuzzy topology*, J. Math. Anal. Appl. 46 (1974), 316-328.
- [6] K. D. Park, *On the Fuzzy \mathbb{K} -proximities*, J. Nat.Sci. Res. Inst. Dongguk Univ. 14 (1994), 19-24.



[7] K. D. Park, *Fuzzy \mathbb{K} -proximities Mapping*, Kangweon-Kyungki Math Jour. 14 (2006), 7-11.

Employ Optimization for Linear Code Decoding

Dr. Ghussoun Ahmad Abdelkareem Al-Jeiroudi
Academic Degree: Assistant Professor

Lecturer at Mathematics Department, Faculty of Sciences, Damascus University, Damascus, Syria,
Specialty: Operational Research,
Email: ghussoun.aljeiroudi@damascusuniversity.edu.sy

Abstract

Decoding techniques are essential in coding theory due to the critical need for error correction in noisy channels. These techniques have extensive applications in fields such as data storage, digital broadcasting, deep space communication, and consumer electronics. As a result, substantial research has been devoted to advancing error correction methods

In this paper, we employ optimization strategies to decode a code C , where C is a linear code in $V_n(q)$. This is done by designing a linear programming using the parity check matrix of the code. This program provides the error vector of the received word in order to get the original code word.

Keywords: Coding Theory, Parity Check Matrix, linear programs.

1. Introduction

Decoding techniques enable the detection and correction of errors that occur during the transmission of data over noisy channels. This ensures the reliability and accuracy of the received information. Error correction is fundamental to maintaining data integrity and reliability in a wide range of applications, from everyday consumer electronics to advance scientific and communication systems.

Decoding techniques enable the detection and correction of errors that occur during the transmission of data over noisy channels. This ensures the reliability and accuracy of the received information.

Applications of Error Correction: Data Storage, Digital Broadcasting, Deep Space Communication, Consumer Electronics.

Usually, the parity check matrices of most codes are sparse and very large, making them challenging to decode. In this paper, we design a a linear programming to decode any linear



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

code. Linear programming is well-studied in optimization. Furthermore, there is a wide range of software available to supply solutions for sparse and large-scale optimization problems. One can use any of these to solve our linear program.

2. Literature Review

The issue of error correction is very popular, prompting many researchers to address the decoding of codes. They are striving to develop faster techniques capable of decoding these codes.

The decoding method used in (Cooke. 1999) is not highly efficient but is quite simple to apply, as it uses the encoding (generator) matrix and majority logic to determine whether a row was used in constructing the received word. (Santi et al. 2018) and (Kamenev. 2021) provide iterative decoding algorithms. The maximum likelihood decoder is used to correct errors in surface codes, which are considered to be one of the leading candidates for ensuring the fault tolerance of a quantum computer, as noted by (Delfosse et al. 2020). (Fathollahi. 2021) proposes an approach consisting of multiple sparse recursive projection aggregations, generated by performing only a selection of projections in each decoder. Ching et al. (2022) use the quantum approximate optimization algorithm to solve the syndrome decoding problem.

3. Decoding:

Let C be an $[n, k, d]$ code, it is a linear code of length n on the subspace $V_n(q)$ and it has dimension k and minimum distance d , where q is the number of the channel alphabet.

Definition 1.3: The generator matrix G of an $[n, k, d]$ code C is a $k \times n$ matrix. Its k rows forms a basis of C "the rows of G generate C ". Hence,

$$C = \{aG : a \in V_k(q)\}.$$

See (Guruswami et al. 2022).

Definition 2.3: The parity check matrix H of an $[n, k, d]$ code C is an $(n - k) \times n$ matrix, which is satisfied

$$\forall c \in C \Rightarrow Hc^T = 0.$$

See (Guruswami et al. 2022).

Definition 3.3: The syndrome s of the received word r in $V_n(q)$ is defined by $s = Hr^T$. See (Henk et al. 1993).

1.3 The Syndrome Decoding:

A method used to detect and correct errors based on the syndrome, which is calculated from the received data and the parity-check matrix of the code. Let s be the syndrome of the received word r . Then



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$s = Hr^T = H(c + e)^T = Hc^T + He^T = 0 + He^T = He^T,$$

where the received word r is equal to the sum of the transmitted codeword c

(from the code C) and an error vector e , caused by the noisy channel. All vectors of the form $r+c$ with c in C form the solution space of this system of linear equations. The set $\{r + c : c \in C\}$ is a coset of C in $V_n(q)$. Our goal is to find a vector e of minimal weight in this coset. This minimal weight vector is known as the coset leader. Once e is found, the codeword $c = r-e$, serves as a good maximum-likelihood estimate of the transmitted codeword, as no other codeword has a higher probability of being the transmitted one. Thus, $r-e$ is indeed a codeword. See (Henk et al. 1993).

4. Use Optimization in Encoding:

In this paper, we design a 0-1 linear programming problem to compute the coset leader in order to determine the error e .

1.4. 0-1 linear programming problem:

Let $e_i = 1$ when there is an error of the index i of the received word, and equals zero elsewhere. The objective function is designed to make the minimal weight in this coset as small as possible to compute coset leader.

The program:

$$\text{Min } f = \sum_{i=1}^n e_i$$

$$\text{Subject to } H e^T = s$$

$$e_i \in \{0, 1\}, \text{ where } i=1, \dots, n$$

The operations of these program is done in Z/qZ .

The objective function f equals the number of the errors in the received word.

Example:

Let the binary $[6, 3, 3]$ code C with parity check matrix

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Let the received word be $r = (1, 0, 1, 0, 0, 1)$

First we compute the syndrome $s = Hr^T = (0, 1, 1)$

The following linear program to calculate the error e is:



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$\text{Min } f = e_1 + e_2 + e_3 + e_4 + e_5 + e_6$$

$$\text{Subject to } e_1 + e_5 + e_6 = 0$$

$$e_2 + e_4 + e_6 = 1$$

$$e_3 + e_4 + e_5 = 1$$

$$e_i \in \{0, 1\}, \text{ where } i=1, \dots, n$$

The solution to this linear program is $e_1 = e_2 = e_3 = e_5 = e_6 = 0$ and $e_4 = 1$, the number of the errors in the received word $f=1$.

So the error $e = (0, 0, 0, 1, 0, 0)$, then codeword will be $c = r - e = (1, 0, 1, 1, 0, 1)$.

5. Results and Discussion:

This paper designs a linear programming problem to encode any linear code. This method uses the syndrome code. Hence, we use the parity check matrix to identify the coset leader, which is used to get the error vector and correct the errors in the received word caused by the noisy channel. There are various software programs available to solve the optimization problem. Users can use one of these to solve our designed linear program and obtain its solution.

6. References

- Ching L., Kao-Yueh K. and Bo-Jyun L., 2022, Syndrome decoding by quantum approximate optimization,
- Cooke B., 1999, Reed-Muller Error Correcting Codes, MIT Undergraduate Journal of Mathematics 1(06), 21-26.
- Delfosse N. and Zemor G., 2020, Linear-time Maximum Likelihood Decoding of Surface Codes over the Quantum Erasure Channel, Physical Review Research 2, 033042.
- Fathollahi D., Farsad N., Hashemi S. and Mondelli M., 2021, Sparse Multi-Decoder Recursive Projection Aggregation for Reed-Muller Codes, IEEE International Symposium on Information Theory, 1082-1087.
- Kamenev M., 2021, On Decoding of Reed-Muller Codes Using a Local Graph Search, IEEE Transactions on Communications 70(2), 739-748.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

Santi E., Häger C. and Pfister H., 2018, Decoding Reed-Muller Codes Using Minimum-Weight Parity Checks. IEEE International Symposium on Information Theory – Proceedings :1296-1300.

Henk C.A. and Tilborg V., 1993, Coding Theory a First Course, Eindhoven, the Netherlands.

Guruswami V., Rudra R. and Sudan M., 2022, Essential Coding Theory, supported in part by the National Science Foundation under CAREER, grantCCF-0844796.

صياغة بلترامي ميشيل المعممة المكتملة لجسم هوك Hook في الحالة
الترموديناميكية .

د. وعد سمير عطية *

دكتورة في الرياضيات التطبيقية ، عضو هيئة تدريسية في الجامعة الوطنية الخاصة.

waed.atteiah@wpu.edu.sy

ملخص البحث:

موضوع البحث هو الحالة الترموديناميكية المستوية لإجهادات الجسم الصلب المتماثل المناحي (Isotropic) والمتجانس (Homogeneous)، ومهملة البنية الجزيئية وخاضع لانفعالات مرنة صغيرة، ضمن المرونة الخطية الترموديناميكية المترابطة مع الحرارة، والذي وضع أساسه الباحث هوك و يُرمز له اختصاراً بـ (H). في البحث، سنعرض أولاً طريقة القوى المتكاملة (IFM)، في استنتاج صياغة بلترامي – ميشيل المكتملة (CBMF) الحاكمة للحالة السكونية المستوية الأولى بإجهادات للجسم هوك [1-4]. سنناقش في البحث، صياغة بلترامي- ميشيل المعممة المكتملة (CGBMF) للحالة الترموديناميكية المستوية لإجهادات الجسم هوك بطريقة القوى الترموديناميكية المعممة المتكاملة (GTDIFM)، وفي النهاية سننهي البحث باقتراح عدد من المسائل المفتوحة.

The Completed Generalized Beltrami-Michell Formulation (CGBMF) for the Thermodynamical Stress Plane State of the Hooke Body

Dr. Waad Samir Attiah †

Applied Math. Doctor, Lecturer at AL Wataniya Private University. waed.atteiah@wpu.edu.sy

Abstract

The subject of the paper is the thermodynamical stress plane state of small strains for the thermoelastic, homogeneous and isotropic body, with neglected structure, and subjected

الكلمات المفتاحية: الحالة الترموديناميكية المستوية للجسم (H). صياغة Beltrami-Michell الترموديناميكية المعممة المكتملة للحالة الترموديناميكية المستوية للإجهادات المرنة للجسم (H).



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

to temperature field, proposed by Hooke, and shortly called (H). First, we introduce the integrated force method (IFM) [1-4] for deriving the completed Beltrami-Michell formulation (CBMF) for the static first stress plane state of small strains of the (H) body. In paper, first using the variational functional of the generalized thermodynamical integrated force method (GTDIFM), we discuss the following: I) The completed generalized Beltrami-Michell Formulation (CGBMF) for the thermo-dynamical stress plane state of small strains for (H) body. Finally, we end the paper, by proposing new open problems for future works.

1. مقدمة:

بدأ ظهور علم مقاومة المواد عام 1632 مع تجربة غاليليو التي لاحظ فيها غاليليو أن مقاومة العارضة تتناسب بصورة غير خطية مع مساحة مقطعها [3] , وبعد حوالي قرن تابع كولومب مسيرة غاليليو في نظرية العوارض.

على الرغم من أن بعض حسابات غاليليو لم تتطور بشكل كامل، إلا أن العبقريّة ظهرت منذ تاريخ ولادة نيوتن في نفس السنة التي توفي فيها غاليليو، وعندها لم تكن معروفة قوانين التوازن أو الحساب التحليلي.

ومع نشوء الثورة الصناعية وانتصارات الحروب , كانت الحاجة ملحة لتسريع تطور علم مقاومة المواد لحاجته في التصميم. بعد ذلك ظهرت عدة كتب حول هذا الموضوع بدءاً من كتاب Timoshenko عام 1930 الذي أعطى معالجة شاملة لنظرية مقاومة المواد, تلا ذلك كتب: Beer & Johnston, Gere & Timoshenko, Hibbeler, Popov, و Higdon Etal ... الخ.

وبالعودة إلى عصر نيوتن فقد وضع الباحث هوك (معاصر نيوتن) العلاقة التالية، التي شكلت فيما بعد مفهوماً أساسياً في علم المرونة (Elasticity): $\sigma = \kappa \epsilon$. ومن ثم في عام 1822، أوجد كوشي ما يسمى بالصياغة الإجهادية المولفة من معادلات التوازن Equilibrium Equations (EE) والشروط الحدية Boundary Conditions (BC). إن المسألة السابقة عبارة عن ثلاثة معادلات مع ثلاثة شروط حدية، والمسألة ستة مجاهيل هي الإجهادات المتناظرة τ_{ij} ، وبالتالي تكون هذه الصيغة، ناقصة. وفي عام 1860 أوجد ساينت - فينانت (Saint - Venant)، صيغة الانفعالات، المولفة فقط من معادلات توافق الانفعالات Compatibility Conditions (CC)، ولم يوجد الشروط الحدية للانفعالات، الأمر الذي يُبقي المسألة المولفة من: صياغة الانفعالات مضافاً لها صياغة الإجهادات أي المسألة المكونة من معادلات التوازن و معادلات توافق الانفعالات و الشروط الحدية مسألة ناقصة، كونها مسألة مولفة من ست معادلات بستة مجاهيل، مضافاً إليها ثلاثة شروط حدية، وهي لا تملك حل وحيد، يتوافق مع سلوك الجسم.

بقي هذا النقص على وضعه هذا حوالي قرن ونصف، حتى بداية القرن الحادي والعشرين.

وفي بداية القرن الحادي والعشرين، وتحديداً في عام 2004، فاجأ الباحثان:

باتنيك , هوكينز العاملان ضمن فريق في وكالة ناسا الفضائية العالمية بإيجادهما للشروط الحدية لتوافق الانفعالات:

Boundary Compatibility Conditions (BCC)

فأثبتوا أن المسألة السابقة، مضافاً لها الشروط الحدية لتوافق الانفعالات هي مسألة تامة، سميها مسألة الإتمام لصياغة بلترامي ميشيل:



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

Completed Beltrami – Michell Formulation

أي أنها تعبر عن مجموع ما يلي :

الشروط الحدية لتوافق الانفعالات مضافاً لها شروط التوازن , ومعادلات توافق الانفعالات , و الشروط الحدية كل ذلك لأجل الحالة السكونية المستوية الأولى، والحالة السكونية الفراغية للانفعالات المرنة للجسم هوك.

أما الطريقة التي اتبعها الباحثان في إيجاد الشروط الحدية لتوافق الانفعالات وكذلك معادلات توافق الانفعالات ومعادلات التوازن والشروط الحدية فنتج من شرط انتظام التغيرات الدالي في طريقة القوى المتكاملة:

Stationary Condition for the Variational Functional of the Integrated Force Method (IFM)

ولنعد إلى الفترة التي لم تكن فيها الشروط الحدية لتوافق الانفعالات مكتشفة، وتحديدًا العام 1963. ففي هذا العام استنتج الباحث اغناشاك تعميم معادلات بيلترامي ميشيل من الحالة السكونية إلى الحالة التحريكية للجسم هوك، سالكاً طريقاً يختلف عن الطريق التقليدي المسلوک في إيجاد هذه المعادلات، حيث الطريق التقليدي المذكور يعتمد على صيغة سانت فينانت ، فحصل الباحث المذكور على معادلات دعاها بمعادلات بيلترامي – ميشيل المعممة:

Generalized Beltrami - Michell Equations (GBME)

وبيّن الباحث المذكور أن المعادلات هذه هي ست معادلات بستة مجاهيل هي المركبات الست σ_{ij} للإجهادات، وإذا أضفنا إلى هذه المعادلات الشروط الحدية، والشروط الابتدائية: $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0, \dot{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij}^0$ ، (المعطاة بشكل معين)، فحل المسألة الناتجة لا يتوافق مع معادلات تحريك هذا الجسم ضمن المرونة الخطية التحريكية. كما أن المعادلات السابقة تحتوي على التناقض التالي: عدد هذه المعادلات هو ست معادلات بستة مجاهيل مستقلة، وعند الانتقال من حالة التحريك إلى حالة التوازن (بأخذ المشتقات الزمنية الثانية مساوية للصفر)، فنحصل على معادلات بلترامي ميشيل، التي هي ثلاث معادلات بستة مجاهيل هي σ_{ij} .

وفي عام 2020 طورت الباحثة وعد عطية عملي باتنيك و هوبكينز و جوزيف اغناشاك وذلك بمناقشة صياغة بيلترامي ميشيل الترموديناميكية المعممة، المكتملة لأجل الحالة ثلاثية البعد للانفعالات المرنة. الطريقة المستخدمة هي تعميم طريقة القوى المتكاملة إلى طريقة القوى الترموديناميكية المتكاملة [8].

2. هدف البحث:

إن السلوك الترموديناميكي المستوي والسلوك الديناميكي المستوي العكسي للجسم هوك لا ينتجان عن السلوك الترموديناميكي الفراغي لهذا الجسم، الأمر الذي يجبرنا على دراسة هذين السلوكيين المذكورين انطلاقاً من أساسياتهما. يهدف البحث إلى استنتاج صياغة بيلترامي – ميشيل الترموديناميكية المعممة المكتملة للحالة الترموديناميكية المستوية لإجهادات جسم هوك.

3. طرق البحث:

من أجل هذا الهدف سنعمد تعميم طريقة القوى المتكاملة [4-1]، إلى طريقة القوى الترموديناميكية المتكاملة مكتوبة لأجل الحالة الترموديناميكية المستوية لإجهادات الجسم هوك من أجل متطلبات البحث، نلزمنا التوطئة التالية.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 آب 2024
دمشق - سورية

توطئة1: نعتد الجملة الإحداثية الديكارتية القائمة، والمباشرة، والخطية $Oxyz$ ، والتي قاعدتها $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$. لأجل الحالات المستوية لإجهادات الجسم المدروس، تكون جميع المقاطع التنسورية الحاكمة للحالة الترموديناميكية للجسم المعبر، تكون مستقلة عن الإحداثي الثالث z ، وهنا نميز حالتين؛

أولاً: الحالة الترموديناميكية المستوية لإجهادات جسم هوك: وفيها نرسم للحالة البدئية للجسم بـ Ω ، التي نفرض أنها منطقة بسيطة الترابط في R^2 وبسماكة قدرها h . توصف العملية الترموديناميكية للجسم المعبر بواسطة مجموعة المقاطع التنسورية المجهولة: $(\mathbf{u}, \theta, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon})$ ، حيث: \mathbf{u} مقطع الإزاحات المتجهي، و $\theta := T - T_0$ حقل سلمي؛ يمثل تغير حقل الحرارة؛ حيث T الحرارة المطلقة في الجسم و T_0 حرارة الحالة الطبيعية له. إضافة إلى ماتقدم ذكره فإن: $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}$ مقطعان تنسوريان متناظران من المرتبة الثانية، على الترتيب هما: مقطع الإجهادات، ومقطع الانفعالات، وإذا رمزنا بـ $]-\infty, 0]$ و $0, +\infty[$ ، فيمكن أن تمثل الحقول السابقة في $\Omega \times T^+$ وفي النظام الإحداثي الديكارتي $[\mathbf{O}, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})]$ ، بالشكل:

$$\mathbf{u} \equiv (u, v, 0), \boldsymbol{\varepsilon} \equiv \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy} & 0 \\ \gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}, \boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

حيث:

$$\varepsilon_z = -\frac{1}{\lambda + 2\mu} [\lambda (\varepsilon_x + \varepsilon_y) + m \theta] \quad (3.2)$$

حيث: $a_t = -(3\lambda + 2\mu)m$ ، و a_t يمثل معامل التمدد الخطي الحراري للجسم، و λ, μ تمثل ثوابت لامى المادة للجسم المدروس. أما مقطع القوة الحجمية \mathbf{B} الذي هو مقطع متجهي، معطى، فيمكن أن يمثل في $\Omega \times T^+$ وفي النظام الإحداثي الديكارتي المعبر، بالشكل:

$$\mathbf{B} \equiv (B_x, B_y, 0) \quad (3.3)$$

أخيراً ننوه إلى أن جميع المركبات الموجودة في العلاقات السابقة تتبع للموضع: $\mathbf{x} \equiv (x, y) \in \Omega$ وللزمن t .
ثانياً: الحالة الديناميكية المستوية العكسية لإجهادات الجسم هوك في هذه الحالة توصف العملية الديناميكية للجسم المعبر بواسطة مجموعة المقاطع التنسورية المجهولة: $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon})$ ، حيث: \mathbf{u} مقطع الإزاحات المتجهي، كما أن: $\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon}$ مقطعان تنسوريان متناظران من المرتبة الثانية، على الترتيب هما مقطع الإجهادات، ومقطع الانفعالات. يمكن أن تمثل الحقول السابقة في $\Omega \times T^+$ وفي النظام الإحداثي الديكارتي المعبر، بالشكل:

$$\mathbf{u} \equiv (0, 0, w), \boldsymbol{\varepsilon} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & \gamma_{xz} \\ 0 & 0 & \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} & \gamma_{yz} & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{xz} \\ 0 & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

أما مقطع القوة الحجمية \mathbf{B} الذي هو مقطع متجهي، معطى، فيمكن في هذه الحالة أن يمثل في $\Omega \times T^+$ وفي النظام الإحداثي الديكارتي المعبر، بالشكل:



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 آب 2024
دمشق - سورية

$$\mathbf{B} \equiv (0, 0, B_z) \quad (3.3)$$

أخيراً ننوه إلى أن جميع المركبات الموجودة في العلاقات السابقة تتبع للموضع: $\mathbf{x} \equiv (x, y) \in \Omega$ وللزمن t . في البحث سنركز اهتمامنا فقط على الحالة الأولى، مؤجلين الحالة الثانية الحالة الديناميكية المستوية العكسية للجسم هوك لأبحاث قادمة.

نعرض فيما يلي نتائج البحث [1-4] المتمثلة بطريقة ثبات دالي لطريقة القوى المتكاملة في استنتاج صياغة بيلترامي – ميشيل المكتملة الحاكمة للحالة السكونية المستوية الأولى بإجهادات للجسم هوك لأجل الحالة السكونية المتساوية درجات الحرارة، المستوية الأولى للإجهادات المرنة للجسم هوك في هذه الحالة تتعين الحالة السكونية المرنة للجسم المعبر عنها بواسطة المقاطع التنسورية المجهولة $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\varepsilon})$ ($\theta = 0$)، التي تأخذ في Ω وفي النظام الإحداثي الديكارتي المعتبر الشكل (3.1) و(3.2)، أما مقطع القوة الحجمية المعطى: \mathbf{B} فيمثل في Ω وفي النظام الإحداثي الديكارتي المعتبر، بالشكل (3.3).

يأخذ دالي (IFM) للجسم السكوني المرن هوك الذي يشغل المنطقة بسيطة الترابط $\Omega \subset R^2$ ، المحاطة بالمنحني المغلق $\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ ($\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2 = \emptyset$)، والذي سماكته h ، يأخذ الشكل التالي:

$$\Pi_S = A + B - W \quad (3.4)$$

حيث A الطاقة الداخلية للجسم التي تعطى من خلال مقطع الإجهاد $\boldsymbol{\sigma}$ ومقطع الإزاحة \mathbf{u} ، بالعلاقة:

$$A(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}) = h \int_{\Omega} \left[\sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] dx dy \quad (3.5)$$

كما أن B تمثل الطاقة الداخلية المتممة في الجسم، والتي تعطى بدلالة مقطع الانفعال $\boldsymbol{\varepsilon}$ ومقطع الإجهاد الزائد $\boldsymbol{\sigma}^e$ [3]، من خلال العلاقة:

$$B(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}^e) = h \int_{\Omega} \left(\varepsilon_x \sigma_x^e + \varepsilon_y \sigma_y^e + 2\gamma_{xy} \tau_{xy}^e \right) dx dy \quad (3.6)$$

أخيراً، الحد: $W(\mathbf{P}, \mathbf{u})$ يمثل كمون القوى الخارجية للجسم، وهو يعطى بالعلاقة الآتية:

$$W(\mathbf{P}, \mathbf{u}) = h \int_{\Omega} (B_x u + B_y v) dx dy + \int_{\mathcal{L}_1} (\bar{P}_x u + \bar{P}_y v) d\ell_1 + \int_{\mathcal{L}_2} (P_x \bar{u} + P_y \bar{v}) d\ell_2, \quad (3.7)$$

ويملك ثلاث مركبات؛ الأولى تتمثل بالتكامل السطحي: $h \int_{\Omega} (B_x u + B_y v) dx dy$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

المتوافق مع القوى الحجمية: B_x و B_y المفروضة (المعلومة) في Ω ، الثانية؛ تتمثل بالتكامل المنحني:
 $\int_{\mathcal{L}_1} (\bar{P}_x u + \bar{P}_y v) d\ell_1$ ، على جزء المنحني: \mathcal{L}_1 ، حيث معطى على هذا الجزء، الحمول الخارجية: \bar{P}_x و \bar{P}_y ، أما
 الثالثة (الأخيرة)؛ فهي تتمثل بالتكامل المنحني: $\int_{\mathcal{L}_2} (P_x \bar{u} + P_y \bar{v}) d\ell_2$ ، على جزء المنحني: \mathcal{L}_2 ، حيث معطى
 على هذا الجزء، الإزاحات: \bar{u} و \bar{v} .

إذا أخذنا بعين الاعتبار العلاقات الهندسية التالية المحققة في Ω :

$$E \varepsilon_x = \sigma_x - \nu \sigma_y , E \varepsilon_y = \sigma_y - \nu \sigma_x ,$$

$$E \gamma_{xy} = (1 + \nu) \tau_{xy}$$

حيث: $\nu = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)}$ تمثل نسبة بواسون، و $E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$ يمثل معامل يونغ،

فتأخذ الطاقة الداخلية المتممة في الجسم الشكل التالي:

$$B(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}^e) = h \int_{\Omega} \left[\frac{(\sigma_x - \nu \sigma_y)}{E} \sigma_x^e + \frac{(\sigma_y - \nu \sigma_x)}{E} \sigma_y^e + 2 \frac{(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \tau_{xy}^e \right] dx dy$$

مما سبق نجد أن $\Pi_s = \Pi_s(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}^e)$ ، لكن بهدف حساب تباير هذا الدالي، علينا لاحقاً اعتبار أنه تابع لمقطع الإزاحة: \mathbf{u} ولمقطع الإجهاد الزائد: $\boldsymbol{\sigma}^e$.

صياغة بيلترامي – ميشيل المكتملة ضمن الحالة المستوية الأولى للانفعالات:

في هذه الحالة فإن دالي التباير فإن دالي التباير الذي سنرمز له هنا بالرمز Π_s^{BMF} سيتبع للإزاحات: v ، u ولمقطع الإجهاد الزائد $\boldsymbol{\sigma}^e$ ، المعطى بدوره في Ω من خلال دالة إجهاد Airy على النحو التالي:

$$\sigma_x^e = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - V , \sigma_y^e = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - V , \tau_{xy}^e = - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (3.10)$$

حيث V كمون القوى الحجمية B_x ، B_y ؛



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$B_x = \frac{\partial V}{\partial x}, B_y = \frac{\partial V}{\partial y} \quad (3.11)$$

بتعويض (3.10) في (3.9) نحصل على:

$$B(\sigma, \Phi) = h \int_{\Omega} \left[\frac{(\sigma_x - \nu \sigma_y)}{E} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - V \right) + \frac{(\sigma_y - \nu \sigma_x)}{E} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - V \right) - 2 \frac{(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right] dx dy \quad (3.12)$$

ينتج عن (3.4) و (3.5) و (3.12) و (3.7) أن دالي التغير: Π_s^{BMF} يأخذ الشكل:

$$\begin{aligned} \Pi_s^{BMF} = & h \int_{\Omega} \left[\sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] dx dy + \\ & h \int_{\Omega} \left[\frac{(\sigma_x - \nu \sigma_y)}{E} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - V \right) + \frac{(\sigma_y - \nu \sigma_x)}{E} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - V \right) - 2 \frac{(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right] dx dy - h \int_{\Omega} (B_x u + B_y v) dx dy \\ & - \int_{\xi_1} (\bar{P}_x u + \bar{P}_y v) d \ell_1 - \int_{\xi_2} (P_x \bar{u} + P_y \bar{v}) d \ell_2, \end{aligned} \quad (3.13)$$

إن شرط انتظام دالي التغير: Π_s^{BMF} ، بعد سلسلة من العمليات الجبرية، مروراً باستخدام مبرهنة غرين، يأخذ الشكل التالي [3]:



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$\begin{aligned} \delta \Pi_s^{\text{BMF}} = h \left\{ \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + B_x \right) \delta u + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + B_y \right) \delta v \right] d\Omega + \frac{1}{E} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y - \nu \sigma_x) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x - \nu \sigma_y) - 2(1+\nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \right] \delta \Phi d\Omega \right\} \\ - h \left\{ \int_{\xi_1} \left[(\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y - \bar{P}_x) \delta u + (\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y - \bar{P}_y) \delta v \right] d\ell_1 \right. \\ \left. + \int_{\xi_2} \left[(u - \bar{u}) \delta (\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y) + (v - \bar{v}) \delta (\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y) \right] d\ell_2 \right. \\ \left. + \frac{1}{E} \int_{\xi} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_y - \nu \sigma_x) n_x + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_x - \nu \sigma_y) n_y \right. \right. \\ \left. \left. - (1+\nu) \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy} n_y + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xy} n_x \right) \right] \delta \Phi d\ell \right\} = 0, \quad (3.14) \end{aligned}$$

حيث: $d\Omega = dx dy$ و $\mathbf{n} \equiv (n_x, n_y)$ متجه واحدة ناظم المنحني المغلق ξ ، المحيط بالجسم، في النقطة المادية اللاغرانجية $p \equiv (x, y)$ منه، حيث \mathbf{n} موجه نحو خارج هذا المنحني ξ . ينتج عن العلاقة (3.14) مايلي:

أولاً: معادلات الحقل المحققة في Ω : وهي مؤلفة:

أ- معادلات التوازن (Equilibrium Equations)، المحققة ضمن Ω : ونحصل عليها من حقيقة أنه في الجزء السطحي للتكامل (3.14) يجب أنه تتعدم أمثال التغيرات $(\delta u, \delta v)$ ، حيث نحصل على معادلاتي التوازن التاليتين المحققتين في Ω :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + B_x = 0, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + B_y = 0, \quad (3.15)$$

ب- معادلة توافق الانفعالات Compatibility Conditions المعبر عنها بلغة الإجهادات، والمحققة ضمن Ω : ونحصل عليها من حقيقة أنه في الجزء السطحي للتكامل (3.14) يجب أنه تتعدم أمثال تغير دالة الإجهاد: $\delta \Phi$ ، حيث نحصل على المعادلة التالية المحققة في Ω :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y - \nu \sigma_x) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x - \nu \sigma_y) - 2(1+\nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0, \quad (3.16)$$

إن معادلة توافق الانفعالات السابقة، تأخذ باستخدام معادلات التوازن، الشكل المكافئ التالي في Ω [3]:



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$\Delta_1 [\sigma_x + \sigma_y + (1+\nu) V] = 0, (3.17)$$

أو الشكل:

$$\Delta_1 (\sigma_x + \sigma_y) + (1+\nu) \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \right) = 0, (3.18)$$

$$\text{حيث } \Delta_1 \text{ مؤثر لابلاس الاشتقاقي السلمي في } R^2 \text{ ؛ } \Delta_1 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

ثانياً: الشروط الحدية المحققة على \mathcal{L} : وهي مؤلفة:

ج - شروط الجر الحدية المحققة على \mathcal{L}_1 : ونحصل عليها من حقيقة أنه في الجزء المنحني للتكامل (3.14) على جزء المنحني \mathcal{L}_1 ، يجب أن تنعدم أمثال التغيرات $(\delta u, \delta v)$ ، فنحصل على الشروط الحدية التالية المحققة على \mathcal{L}_1 :

$$\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y = \bar{P}_x, \quad \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y = \bar{P}_y, \quad (3.19)$$

د- شروط توافق الانفعالات الحدية (Boundary Compatibility Conditions)، المحققة على كامل المنحني \mathcal{L} : ونحصل عليها من حقيقة أنه في الجزء المنحني للتكامل (3.14) على كامل المنحني \mathcal{L} ، يجب أن تنعدم أمثال التغير $\delta \phi$ ، فنحصل على الشرط الحدي التالي المحقق على \mathcal{L} :

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} (\sigma_y - \nu \sigma_x) n_x + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_x - \nu \sigma_y) n_y \\ & - (1+\nu) \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy} n_y + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xy} n_x \right) = 0 \end{aligned} \quad (3.20)$$

إن شروط الجر الحدية (3.19) هي شروط مألوفة في مسألة الحالة السكونية المستوية الأولى للانفعالات المرنة للجسم الصلب، بينما الشرط (3.20) هو الشرط الجديد المسمى بشرط توافق الانفعالات، الحدي على \mathcal{L} .

هـ- شروط الاستمرار، الحدية Continuously boundary Conditions المحققة على \mathcal{L}_2 : ونحصل عليها من حقيقة أنه في الجزء المنحني للتكامل (3.14) على جزء المنحني \mathcal{L}_2 ، يجب أن تنعدم أمثال التغيرات

$$\delta (\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y) \text{ و } \delta (\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y)$$

الحدية التالية المحققة على \mathcal{L}_2 :



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$u = \bar{u}, v = \bar{v}, \quad (3.21)$$

تمثل المعادلات والشروط (3.20) - (3.14)، صياغة بلترامي ميشيل المكتملة لأجل الحالة السكونية المستوية الأولى للانفعالات المرنة للجسم الصلب [3].

4. النتائج والمناقشة:

فيما يلي سنناقش الصياغة المكتملة لمعادلات بلترامي ميشيل المعممة، من الحالة السكونية المستوية الأولى (First Plane Static Case) إلى الحالة التحريكية الحرارية المستوية (Plane Thermodynamical Case) لإجهادات الجسم الصلب المدروس هوك. الطريقة المعتمدة هي تعميم الطريقة المستخدمة في [1]، انطلاقاً من التغيير الافتراضي لدالي طريقة القوة الديناميكية الحرارية المتكاملة (Integrated Thermodynamically Force Method)، حيث الدالي الذي سنرمز له هنا بالرمز Π_{TDS} هو تعميم للدالي Π_S الموجود في [1-4]، من الحالة السكونية المستوية الأولى للجسم (H) إلى الحالة الترموديناميكية المستوية له. ويمكن هذا التعميم بإضافة طاقة العطالة إلى الدالي Π_S ضمن عبارة هذا الدالي في [1-4]، على النحو التالي:

يملك الدالي Π_{TDS} في حالتنا هذه أربعة حدود بالشكل:

$$\Pi_S = A + B + C - W \quad (4.1)$$

حيث A الطاقة الداخلية للجسم التي تعطى من خلال مقطع الإجهاد σ ومقطع الإزاحة \mathbf{u} ، بالشكل:

$$A(\sigma, \mathbf{u}) = h \int_{\Omega} \left[\sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] dx dy \quad (4.2)$$

و B تمثل الطاقة الداخلية المتممة في الجسم، والتي تعطى بدلالة مقطع الانفعال ϵ ومقطع الإجهاد الزائد σ^e ، من بواسطة العلاقة:

$$B(\epsilon, \sigma^e) = h \int_{\Omega} \left(\epsilon_x \sigma_x^e + \epsilon_y \sigma_y^e + 2\gamma_{xy} \tau_{xy}^e \right) dx dy \quad (4.3)$$

والحد C يمثل طاقة العطالة للجسم الصلب (H)، معبر عنها بدلالة مقطع الإزاحة \mathbf{u} ، على النحو الآتي:

$$C(\mathbf{u}) = h \int_{\Omega} \rho \left(u \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + v \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) dx dy \quad (4.4)$$

أخيراً، الحد: $W(\mathbf{P}, \mathbf{u})$ يمثل كمون القوى الخارجية للجسم، ويعطى بالعلاقة:



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$W(\mathbf{P}, \mathbf{u}) = h \int_{\Omega} (B_x u + B_y v) dx dy + \int_{\xi_1} (\bar{P}_x u + \bar{P}_y v) d\ell_1 + \int_{\xi_2} (P_x \bar{u} + P_y \bar{v}) d\ell_2, \quad (4.5)$$

وهو يملك ثلاث مركبات؛ الأولى هي التكامل السطحي: $h \int_{\Omega} (B_x u + B_y v) dx dy$ ،

المتوافق مع القوى الحجمية: B_x و B_y المفروضة (المعلومة) في Ω ، والثانية؛ هي التكامل المنحني:

على جزء المنحني: ξ_1 ، حيث يعطى على هذا الجزء، الحمول الخارجية: \bar{P}_x و \bar{P}_y ، أما

الثالثة (الأخيرة)؛ فهي التكامل المنحني:

على جزء المنحني: ξ_2 ، حيث يعطى على هذا الجزء، الإزاحات: \bar{u} و \bar{v} .

لنأخذ، بعين الاعتبار العلاقات التأسيسية العكسية التالية المحققة في $\Omega \times T$:

$$\begin{aligned} E \varepsilon_x &= \sigma_x - \nu \sigma_y + (2\nu - 1)m \theta, \\ E \varepsilon_y &= \sigma_y - \nu \sigma_x + (2\nu - 1)m \theta, \\ E \gamma_{xy} &= (1 + \nu) \tau_{xy} \end{aligned} \quad (4.6)$$

حيث الحرارة θ ، وفقاً لنظرية التوصيل الحراري [7]، تحقق معادلة التوصيل الحراري التالية في $\Omega \times T$:

$$\hat{D}\theta + \frac{2\mu m T_0}{k(\lambda + 2\mu)} (\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y) = -\frac{r}{k}, \quad (4.7)$$

حيث النقطة تدل على المشتق الجزئي الزمني؛ $\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial t}$ ، والمؤثر الاشتقاقي:

$$\hat{D} := \Delta_1 - \frac{1}{k} \left(c + \frac{m^2 T_0}{\lambda + 2\mu} \right) \frac{\partial}{\partial t}, \quad (4.8)$$

حيث: k التوصيل الحراري، و m المعامل الإجهادي-الحراري، c الحرارة النوعية للجسم المدروس، وجميعها مقادير حقيقية ثابتة. كما أن: r هو تابع معطى، للموضع والزمن؛

مضافاً إلى ذلك، الشروط الحدية والابتدائية التالية، المتعلقة بالحقل الحراري θ :



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

- الشرط الحدي على $\mathcal{L} \times T$:

$$\begin{aligned} \theta &= g \text{ on } \mathcal{L}^\theta \times T, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} &= q \text{ on } \mathcal{L}^q \times T, \end{aligned} \quad (4.9)$$

حيث التابع الحقيقي: g معطى على $\mathcal{L}^\theta \times T$ ، والتابع الحقيقي q معطى على $\mathcal{L}^q \times T$ ،

$$\text{أخيراً: } (\mathcal{L}^\theta \cap \mathcal{L}^q = \emptyset) \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}^\theta + \mathcal{L}^q$$

$$\text{و: } \frac{\partial \theta}{\partial \mathbf{n}} := \mathbf{n} \cdot \text{grad} \theta = n_x \frac{\partial \theta}{\partial x} + n_y \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

- الشرط الابتدائي في $\Omega \times \{0\}$:

$$\theta = \theta^0, \quad (4.10) \quad (\text{حيث التابع الحقيقي: } \theta^0, \text{ معطى في } \Omega).$$

إذا عوضنا الآن، (4.6) في (4.3)،

$$\begin{aligned} B(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}^e, \theta) &= h \int_{\Omega} \left[\frac{(\sigma_x - \nu \sigma_y)}{E} \sigma_x^e + \frac{(\sigma_y - \nu \sigma_x)}{E} \sigma_y^e + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(2\nu-1)m}{E} \theta (\sigma_x^e + \sigma_y^e) + 2 \frac{(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \tau_{xy}^e \right] dx dy \end{aligned} \quad (4.11)$$

مما سبق نجد أن $\Pi_S = \Pi_S(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{u}, \theta, \boldsymbol{\sigma}^e)$ ، لكن بهدف حساب تغيّر هذا الدالي، علينا لاحقاً اعتبار أنه تابع لمقطع الإزاحة: \mathbf{u} ولمقطع الإجهاد الزائد: $\boldsymbol{\sigma}^e$.

صياغة بيلترامي ميشيل المعممة المكتملة لأجل الحالة الترموديناميكية المستوية لإجهادات الجسم المعتبر هوك:

في هذه الحالة أيضاً، سنعتبر أن دالي التغيّر الذي سنرمز له هنا أيضاً بالرمز Π_S^{BMF} ، تابع للإزاحات: \mathbf{u} ، v ، ولمقطع الإجهاد الزائد $\boldsymbol{\sigma}^e$ ، المعطى بدوره في Ω من خلال دالة إجهاد Airy على النحو التالي:

يعبر عنها بدلالة الإزاحات u ، v ، فقط، من خلال العلاقات الهندسية التالية γ_{xy} ينتج ذلك عن كزن كلاً من ε_x و ε_y و⁶

$$\text{المحققة في } \Omega \times T^+ : \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$\sigma_x^e = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - V, \quad \sigma_y^e = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - V, \quad \tau_{xy}^e = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \quad (4.12)$$

حيث V كمون القوى الحجمية B_x, B_y ؛

$$B_x = \frac{\partial V}{\partial x}, \quad B_y = \frac{\partial V}{\partial y} \quad (4.13)$$

بتعويض (4.12) في (4.11) نحصل على:

ينتج ذلك عن كزن كلاً من ϵ_x و ϵ_y و γ_{xy} يعبر عنها بدلالة الإزاحات u, v ، فقط، من خلال العلاقات الهندسية التالية

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) : \Omega \times T^+$$

$$B(\sigma, \Phi, \theta) =$$

$$= h \int_{\Omega} \left[\frac{(\sigma_x - \nu \sigma_y)}{E} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - V \right) + \frac{(\sigma_y - \nu \sigma_x)}{E} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - V \right) \right. \\ \left. + \frac{(2\nu - 1)m \theta}{E} (\Delta_1 \Phi - 2V) - 2 \frac{(1 + \nu)}{E} \tau_{xy} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right] dx dy$$

ينتج عن (4.1) و(4.2) و(4.4) و(4.5) و(4.14) أن دالي التغير: Π_s^{BMF} يأخذ الشكل:

$$\Pi_s^{BMF} = h \int_{\Omega} \left[\sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} + \tau_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] dx dy + \\ h \int_{\Omega} \left[\frac{(\sigma_x - \nu \sigma_y)}{E} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - V \right) + \frac{(\sigma_y - \nu \sigma_x)}{E} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - V \right) \right. \\ \left. + \frac{(2\nu - 1)m \theta}{E} (\Delta_1 \Phi - 2V) - 2 \frac{(1 + \nu)}{E} \tau_{xy} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right] dx dy \quad (4.15) \\ - h \int_{\Omega} (B_x u + B_y v) dx dy - \int_{\xi_1} (\bar{P}_x u + \bar{P}_y v) d \ell_1 \\ - \int_{\xi_2} (P_x \bar{u} + P_y \bar{v}) d \ell_2,$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

باتباع طريقة مشابهة للطريقة المتبعة في [3] نجد ان شرط انتظام دالي التغيرات: Π_s^{BMF} ، بعد سلسلة من العمليات الجبرية، مروراً باستخدام بمبرهنة غرين، يأخذ الشكل التالي:

$$\begin{aligned} \delta \Pi_s^{BMF} = & h \left\{ \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + B_x - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \delta u + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + B_y - \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right) \delta v \right] d\Omega + \right. \\ & \left. + \frac{1}{E} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y - \nu \sigma_x) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x - \nu \sigma_y) + \right. \right. \\ & \left. \left. + (2\nu - 1)m \Delta_1 \theta - 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \right] \delta \Phi d\Omega \right\} \\ & - h \left\{ \int_{\xi_1} \left[(\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y - \bar{P}_x) \delta u + (\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y - \bar{P}_y) \delta v \right] d\ell_1 \right. \\ & \left. + \int_{\xi_2} \left[(u - \bar{u}) \delta (\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y) + (v - \bar{v}) \delta (\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y) \right] d\ell_2 \right. \\ & \left. + \frac{1}{E} \int_{\xi} \left[\frac{\partial}{\partial x} (\sigma_y - \nu \sigma_x + (2\nu - 1)m \theta) n_x + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial}{\partial y} (\sigma_x - \nu \sigma_y + (2\nu - 1)m \theta) n_y \right. \right. \\ & \left. \left. - (1 + \nu) \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy} n_y + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xy} n_x \right) \right] \delta \Phi d\ell \right\} = 0, \end{aligned} \quad (4.16)$$

وينتج عن العلاقة (4.16) مايلي:

أولاً : معادلات الحقل المحققة في $\Omega \times T$: وهي مؤلفة:

أ- معادلات الحركة المحققة ضمن $\Omega \times T$: ونحصل عليها من حقيقة أنه في الجزء السطحي للتكامل (4.16) يجب أن تنعدم أمثال التغيرات: $(\delta u, \delta v)$ ، حيث نحصل على معادلاتي الحركة التاليتين المحققتين في $\Omega \times T$:



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + B_x &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} , \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + B_y &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (4.17)$$

ب - معادلة توافق الانفعالات المعبر عنها بلغة الإجهادات والحرارة، والمحققة ضمن $\Omega \times T$ ونحصل عليها من حقيقة أنه في الجزء السطحي للتكامل (4.16) يجب أنه تنعدم أمثال تغير دالة الإجهاد: $\delta \Phi$ ، حيث نحصل على المعادلة التالية المحققة في $\Omega \times T$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_y - \nu \sigma_x) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x - \nu \sigma_y) + (2\nu - 1)m \Delta_1 \theta \\ - 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0 , \end{aligned} \quad (4.18)$$

ثانياً: الشروط الحدية المحققة على $\mathcal{L} \times T$: وهي مؤلفة:

ج - شروط الجر الحدية المحققة على $\mathcal{L}_1 \times T$ ونحصل عليها من حقيقة أنه في الجزء المنحني للتكامل (4.16) على جزء المنحني \mathcal{L}_1 ، يجب أن تنعدم أمثال التغيرات $(\delta u, \delta v)$ ، فنحصل على الشروط الحدية التالية المحققة على $\mathcal{L}_1 \times T$:

$$\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y = \bar{P}_x , \quad \tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y = \bar{P}_y , \quad (4.19)$$

د- شروط توافق الانفعالات، الحدية، مُعبراً عنها بلغة الإجهادات والحرارة، والمحققة على كامل المنحني \mathcal{L} : ونحصل عليها من حقيقة أنه في الجزء المنحني للتكامل (4.16) على كامل المنحني \mathcal{L} ، يجب أن تنعدم أمثال التغير $\delta \Phi$ ، فنحصل على الشرط الحدي التالي المحقق على $\mathcal{L} \times T$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [\sigma_y - \nu \sigma_x + (2\nu - 1)m \theta] n_x + \frac{\partial}{\partial y} [\sigma_x - \nu \sigma_y + (2\nu - 1)m \theta] n_y \\ - (1 + \nu) \left(\frac{\partial}{\partial x} \tau_{xy} n_y + \frac{\partial}{\partial y} \tau_{xy} n_x \right) = 0 , \end{aligned} \quad (4.20)$$

إن شروط الجر الحدية (4.19) هي شروط مألوفة في مسألة الحالة الترموديناميكية المستوية للانفعالات المرنة للجسم الصلب، بينما الشرط الحدي (4.20) هو الشرط الجديد المسمى بشرط توافق الانفعالات، الحدي على $\mathcal{L} \times T$ ، معبراً عنه بلغة الإجهادات والحرارة.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

هـ شروط الاستمرار الحدية المحققة على $\mathcal{E}_2 \times T$: ونحصل عليها من حقيقة أنه في الجزء المنحني للتكامل (4.16) على جزء المنحني \mathcal{E}_2 ، يجب أن تنعدم أمثال التغيرات $\delta(\sigma_x n_x + \tau_{xy} n_y)$ و $\delta(\tau_{xy} n_x + \sigma_y n_y)$ ، فنحصل على الشروط الحدية التالية المحققة على $\mathcal{E}_2 \times T$:

$$u = \bar{u}, \quad v = \bar{v}, \quad (4.21)$$

هذا من جهة أولى. ومن جهة أخرى، باتباع طريقة اغناتشاك [6]، لنوجد الآن معادلات بيلترامي – ميشيل المعممة إلى الحالة الترموديناميكية المستوية للجسم الصلب المدروس هوك انطلاقاً من معادلات لامي التالية لهذا الجسم، والمحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\begin{aligned} \square_2^* u + \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{2m}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{B_x}{\mu} &= 0, \\ \square_2^* v + \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{2m}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{B_y}{\mu} &= 0, \\ \bar{D}\theta + \frac{2\mu m T_0}{k(\lambda + 2\mu)} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= -\frac{r}{k}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\text{حيث: } \hat{c}_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}, \quad \square_2^* = \Delta_1 - \frac{1}{\hat{c}_2^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

ومن العلاقات الهندسية التالية، المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (4.23)$$

ومن العلاقات التأسيسية العكسية (4.6) المحققة في $\Omega \times T$ ، باتباع مايلي:

بحذف الإزاحات: (u, v) معادلات لام (4.22) والعلاقات الهندسية (4.23)، نحصل على المعادلات التالية المحققة في $\Omega \times T^+$

وهي العلاقات () في العلاقات التأسيسية (4.23) من تعويض العلاقات الهندسية (4.22) الأولى والثانية في (Lame) تنتج معادلتنا لامي⁷ الثالثة في (Lame)، أما معادلة 4.17، من ثم تعويض الناتج في معادلات الحركة () بالنسبة للإجهادات 4.6 الناتجة عن حل العلاقات (4.7) في معادلة التوصيل الحراري (4.23) فننتج من تعويض العلاقات الهندسية (4.22)



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

تنتج معادلتنا لامي Lamé الأولى والثانية في (4.22) من تعويض العلاقات الهندسية (4.23) في العلاقات التأسيسية (وهي العلاقات الناتجة عن حل العلاقات (4.6) بالنسبة للإجهادات) ، من ثم تعويض الناتج في معادلات الحركة (4.17) ، أما معادلة Lamé الثالثة في (4.22) فتنتج من تعويض العلاقات الهندسية (4.23) في معادلة التوصيل الحراري (4.7).

$$\begin{aligned} \square_2^* \varepsilon_x + \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{2m}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial B_x}{\partial x} &= 0, \\ \square_2^* \varepsilon_y + \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{2m}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{1}{\mu} \frac{\partial B_y}{\partial y} &= 0, \\ \square_2^* \gamma_{xy} + \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) + \frac{2m}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} + \\ &+ \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial B_x}{\partial y} + \frac{\partial B_y}{\partial x} \right) = 0, \\ \hat{D} \theta + \frac{2\mu m T_0}{k(\lambda + 2\mu)} (\dot{\varepsilon}_x + \dot{\varepsilon}_y) &= -\frac{r}{k}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

أخيراً، بتعويض العلاقات التأسيسية العكسية (4.6) في المعادلات (4.24)، من ثم التبسيط والحصول على المعادلات الأربع التالية، المحققة في $\Omega \times T^+$:

$$\begin{aligned} \square_2^* [\sigma_x - \nu \sigma_y + (2\nu - 1)m \theta] + \\ + (1 + \nu) \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{E}{\mu} \frac{\partial B_x}{\partial x} &= 0, \\ \square_2^* [\sigma_y - \nu \sigma_x + (2\nu - 1)m \theta] + \\ + (1 + \nu) \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{E}{\mu} \frac{\partial B_y}{\partial y} &= 0, \\ \square_2^* \tau_{xy} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{\partial B_x}{\partial y} + \frac{\partial B_y}{\partial x} &= 0, \\ D' \theta + \frac{m T_0}{k(2\mu + 3\lambda)} (\dot{\sigma}_x + \dot{\sigma}_y) &= -\frac{r}{k}, \end{aligned} \quad (4.25)$$

$$.D' := \Delta_1 - \frac{1}{k} \left(c + \frac{3m^2 T_0}{3\lambda + 2\mu} \right) \frac{\partial}{\partial t}, \text{ حيث:}$$

وهي معادلات بيلترامي – ميشيل المعممة التالية، إلى الحالة الترموديناميكية المستوية لإجهادات للجسم الصلب المرن المدروس هوك.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

نضيف الشروط الابتدائية التالية المحققة في $\{0\} \times \Omega^8$ إلى معادلات بيلترامي - ميشيل المعممة السابقة:

$$\sigma_x = \sigma_x^0, \sigma_y = \sigma_y^0, \tau_{xy} = \tau_{xy}^0, \theta = \theta^0, \quad (4.26)$$

و:

$$\dot{\sigma}_x = \dot{\sigma}_x^0, \dot{\sigma}_y = \dot{\sigma}_y^0, \dot{\tau}_{xy} = \dot{\tau}_{xy}^0, \dot{\theta} = \dot{\theta}^0, \quad (4.27)$$

حيث:

$$\begin{aligned} \sigma_x^0 &= 2\mu \varepsilon_x^0 + \frac{1-2\nu}{1-\nu} [\lambda (\varepsilon_x^0 + \varepsilon_y^0) + m \theta^0], \\ \sigma_y^0 &= 2\mu \varepsilon_y^0 + \frac{1-2\nu}{1-\nu} [\lambda (\varepsilon_x^0 + \varepsilon_y^0) + m \theta^0], \\ \tau_{xy}^0 &= 2\mu \gamma_{xy}^0, \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_x^0 &= 2\mu \dot{\varepsilon}_x^0 + \frac{1-2\nu}{1-\nu} [\lambda (\dot{\varepsilon}_x^0 + \dot{\varepsilon}_y^0) + m \dot{\theta}^0], \\ \dot{\sigma}_y^0 &= 2\mu \dot{\varepsilon}_y^0 + \frac{1-2\nu}{1-\nu} [\lambda (\dot{\varepsilon}_x^0 + \dot{\varepsilon}_y^0) + m \dot{\theta}^0], \\ \dot{\tau}_{xy}^0 &= 2\mu \dot{\gamma}_{xy}^0, \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\dot{\theta}^0 = \frac{k(3\lambda+2\mu)}{c(3\lambda+2\mu)+3m^2T_0} \left[\Delta_1 \theta^0 + \frac{2\mu m T_0}{k(\lambda+2\mu)} (\dot{\varepsilon}_x^0 + \dot{\varepsilon}_y^0) + \frac{r^0}{k} \right],$$

وحيث:

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u^0}{\partial x}, \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v^0}{\partial x}, \gamma_{xy}^0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x} \right), \quad (4.30)$$

³ تنتج هذه الشروط الابتدائية عن الشروط الابتدائية للإزاحات، ولسرعة هذه الإزاحات، ولحقل درجات الحرارة، وعن العلاقات الهندسية (4.23) والعلاقات التأسيسية الموافقة للعلاقات التأسيسية العكسية (4.6)، ومعادلة التوصيل الحراري (4.7).



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$\varepsilon_x^0 = \frac{\partial u^0}{\partial x}, \varepsilon_y^0 = \frac{\partial v^0}{\partial x}, \gamma_{xy}^0 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x} \right), (4.31)$$

أيضاً: u^0, v^0 على الترتيب تمثل الإزاحات الابتدائية، أو القيم الابتدائية للإزاحات u, v ، أما \dot{u}^0, \dot{v}^0 فهي تمثل، على الترتيب، السرعة الابتدائية للإزاحات أو القيم الابتدائية للسرعة: \dot{u}, \dot{v} . أخيراً: r^0 تمثل القيمة الابتدائية للمصادر الحرارية: r .

تعريف 1- (مسألة القيم الحدية والابتدائية المختلطة لمعادلات بيلترامي - ميشيل المعممة إلى الحالة الترموديناميكية المستوية لإجهادات لجسم المرن المدروس):

نسمي معادلات بيلترامي - ميشيل الترموديناميكية المعممة (4.25)، مضافاً لها الشروط الابتدائية (4.31)–(4.26) وشروط الجر الحدية، الترموديناميكية (4.19)، وشروط توافق الانفعالات، الحدية، الترموديناميكية (معتبر عنها بالإجهادات والحرارة) (4.20) والشروط الحدية الحرارية (4.9)، وشروط الاستمرار الحدية، الترموديناميكية، بالإزاحات (4.21)، نسميها بمسألة القيم الحدية والابتدائية المختلفة لمعادلات بيلترامي - ميشيل المعممة إلى الحالة الترموديناميكية المستوية لإجهادات لجسم المرن المدروس.

الصياغة المكتملة لمعادلات بيلترامي ميشيل لأجل الحالة الترموديناميكية المستوية لإجهادات الجسم المعتبر هوك تتألف هذه الصياغة من:

- مسألة القيم الحدية والابتدائية المختلفة لمعادلات بيلترامي - ميشيل المعممة إلى الحالة الترموديناميكية المستوية لإجهادات لجسم المرن المدروس، وهي.

- العلاقات التأسيسية العكسية (4.6).

- العلاقات الهندسية (4.23).

آلية حل المسألة:

1) بحل مسألة القيم الحدية والابتدائية المختلفة لمعادلات بيلترامي- ميشيل المعممة إلى الحالة الترموديناميكية المستوية لإجهادات لجسم المدروس، ضمن شروطها الابتدائية وشروطها الحدية (ماعدا شروط الاستمرار الحدية الترموديناميكية بالإزاحات (4.21))، نحصل على الإجهادات والحرارة: $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \theta$.

2) نعوض ذلك في العلاقات التأسيسية العكسية (4.6)، فنحصل على الانفعالات:

$$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

(3) بمكاملة العلاقات الهندسي (4.23) (التي أصبحت أطرافها اليسرى معلومة)، بالنسبة للإزاحات، ضمن شروط الاستمرار الحدية الترموديناميكية بالإزاحات (4.21)، نحصل على الإزاحات: u, v ، وبهذا الشكل نكون قد حصلنا على جميع الحقول الفيزيائية المطلوبة.

5. الاستنتاجات والمقترحات:

أولاً) الاستنتاجات: ناقشنا الصياغة المكتملة (بشكلها المختلط) لمعادلات بيلترامي - ميشيل المعممة إلى الحالة الترموديناميكية المستوية لإجهادات جسم هوك الصلب المرن، والمتجانس والمتماثل المناحي.

ثانياً) المقترحات: يمكن أن نختم هذا البحث باقتراح ثلاث مسائل للمناقشة، هي الآتية:

- ❖ تعميم شرط انتظام التغيرات الدالي في طريقة القوى المتكاملة من ثم استنتاج الشروط الحدية لتوافق الانفعالات و الشروط الحدية لتوافق الانفعالات بالحالة الديناميكية لجسم مرن استقطابي في المرونة الخطية الاستقطابية، التحريكية، التي لأجلها تصبح صياغة بلترامي ميشيل المعممة المكتملة لأجل الحالة الديناميكية المستوية لإجهادات جسم هوك تامة.
- ❖ تعميم شرط انتظام التغيرات الدالي في طريقة القوى المتكاملة من ثم استنتاج الشروط الحدية لتوافق الانفعالات و الشروط الحدية لتوافق الانفعالات بالحالة الديناميكية لمائع تقليدي ولمايع استقطابي في الهيدروديناميك التقليدي والهيدروديناميك الاستقطابي، التي لأجلها تصبح صياغة بلترامي ميشيل المعممة المكتملة لأجل الحالة الديناميكية المستوية لإجهادات جسم هوك تامة.
- ❖ تعميم شرط انتظام التغيرات الدالي في طريقة القوى المتكاملة من ثم استنتاج الشروط الحدية لتوافق الانفعالات و الشروط الحدية لتوافق الانفعالات بالحالة الديناميكية لجسم مرن دقيق الاستقطاب في المرونة الخطية دقيقة الاستقطاب التحريكية، التي لأجلها تصبح صياغة بلترامي ميشيل المعممة المكتملة لأجل الحالة الديناميكية المستوية لإجهادات جسم هوك تامة.
- ❖ تعميم شرط انتظام التغيرات الدالي في طريقة القوى المتكاملة من ثم استنتاج الشروط الحدية لتوافق الانفعالات و الشروط الحدية لتوافق الانفعالات بالحالة الديناميكية لمائع دقيق الاستقطاب في الهيدروديناميك دقيق الاستقطاب، والتي لأجلها تصبح صياغة بلترامي ميشيل المعممة المكتملة لأجل الحالة الديناميكية المستوية لإجهادات جسم هوك تامة.

المراجع

[1]- S.N. Patnaik , I.Kaljevic , D.A.Hopkins and S.Saigal, (1995), Completed Beltrami-Michell formulation for mixed boundary value problems in elasticity, NASA Technical Memorandum 106809 (1995).

[2]- S.N. Patnaik , D.A.Hopkins, (2001), Stress Formulation in Three-Dimensional Elasticity , NASA/TP 210515 (2001).

[3]- S.N. Patnaik, (1986), The Variational Energy Formulation for the Integrated Force Method , AIAA JOURNAL, VOL. 24, NO. 1, JANUARY 1986, p.129-137.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

Odd Numbers and Perfect Numbers

Ibrahem Al-horany

¹ Master in Applied Mathematics, Department of Mathematics, Al-Baath University.

Abstract

In this paper, we have studied the possibility of odd integers being forms of $8k + 1, 4k - 1$ where $k^3 - 1$ are perfect numbers. in addition to highlighting a special relationship with odd prime numbers and proving it based on the concept of perfect numbers. We also defined Ho-numbers as special numbers and proved that these numbers can not be a perfect numbers.

Key_Words:

Perfect number, Odd number, index function, Ore-number, Ho-number.

1. Introduction

In his book principles, the Greek mathematician Euclid provided an accurate definition of the perfect natural number. Then he proved that if the natural number $2^p - 1$ is prime, it generates a perfect natural number of the form $2^{p-1}(2^p - 1)$.

Later, the Swiss Leonhat Euler proved that all perfect even natural numbers must be of the previous form. The question of the possibility of the existence of an odd perfect natural number has remained open until the present time, and has been the subject of study by many mathematicians after Euler. They specified the conditions that must be met if it exists, without arriving at a decisive answer.

2. Research aim

The research aims to study some special forms of natural numbers and the possibility of them being perfect numbers, in addition to highlighting a special relationship with odd prime numbers and proving it based on the concept of perfect numbers.

3. Preliminaries



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 آب 2024
دمشق - سورية

Definition 1. [2] A perfect number n is a positive integer that is equal to the sum of its proper divisors, meaning $s(n) = 2n$ where $s(n)$ the sum of all positive divisors of a positive integer n .

Definition 2. [2,3] the multiplicative function $h(n) = \frac{s(n)}{n}$ is called the index of n . A number n is perfect if and only if $h(n) = 2$. The number is called deficient if $h(n) < 2$, and abundant if $h(n) > 2$.

Theorem 1. [2] If $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ is the prime factorization of $n > 1$, then

$$(i). s(n) = \frac{p_1^{a_1+1} - 1}{p_1 - 1} \frac{p_2^{a_2+1} - 1}{p_2 - 1} \dots \frac{p_k^{a_k+1} - 1}{p_k - 1}, \text{ and}$$

$$(ii). t(n) = (a_1 + 1) \dots (a_k + 1)$$

Where $s(n) = \sum_{d|n} d$, $t(n) = \sum_{d|n} 1$ and $a_i \in \mathbb{N}; i = 1, 2, \dots, k$.

Theorem 2. [2] If $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ is the prime factorization of $n > 1$, and $h(n)$ the index of $n > 1$, then

$$h(n) = \left(1 + \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_1^2} + \dots + \frac{1}{p_1^{a_1}}\right) \left(1 + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_2^2} + \dots + \frac{1}{p_2^{a_2}}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{p_k} + \frac{1}{p_k^2} + \dots + \frac{1}{p_k^{a_k}}\right)$$

Theorem 3. [2] (Euclid-Euler theorem). An even natural number n is perfect if and only if $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$, where $2^p - 1$ is prime.

Definition 3. [3,4] An Ore-number (or harmonic divisor number) is a positive integer n whose divisors have a harmonic mean that is an integer. namely,

$$H(n) = \frac{n t(n)}{s(n)} \in \mathbb{N}.$$

If the number n is perfect number, then $H(n) = \frac{t(n)}{2} \in \mathbb{N}$.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 آب 2024
دمشق - سورية

Theorem 4. [2,3] the number $n = p^k q^l$ where p, q distinct prime numbers and $k, l \in \mathbb{N}$, is not a perfect number.

Theorem 5. [2,3] for any perfect number, even or odd, the number of all positive integer divisors is even.

Theorem 6. [1,2] (Euler) If n is an odd perfect number, then

$$n = q^{4m+1} p_1^{2a_1} \dots p_k^{2a_k} ; q \equiv 1 \pmod{4}$$

where the q, p_1, \dots, p_k are distinct odd primes.

Theorem 7. [5] (Touchard) An odd perfect number n is of the form $n = 12m + 1$ or $n = 36m + 9$.

Theorem 8. [3] No perfect number n can be of the form $6k - 1$.

4. discussion and main results

Theorem 9. there is no odd number from the form $n = 4k - 1$ can be a perfect number.

Proof. We denote that $n \equiv -1 \text{ or } 3 \pmod{4}$, also we have

$$2n \equiv 2 \text{ or } -2 \pmod{4}.$$

assume that d divisor to n , namely $d \frac{n}{d} = n$, so we have

$$d \frac{n}{d} \equiv -1 \text{ or } 3 \pmod{4}$$

in the first case either $d \equiv -1 \pmod{4}$ and $\frac{n}{d} \equiv 1 \pmod{4}$ or by contract. thus,

$d + \frac{n}{d} \equiv 0 \pmod{4}$, then we have

$$s(n) = \sum_{d|n} d + \frac{n}{d} \equiv 0 \pmod{4}$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

then the number n is not a perfect number because $s(n) = 2n \pmod{4}$ or $2 \pmod{4}$. in the

second case when $d \pmod{4} = 3$ we have $d \pmod{4} = 1$ and $\frac{n}{d} \pmod{4} = 3$ or

by contract. thus, $n + \frac{n}{d} \pmod{4} = 0$, and also we have in this case $s(n) \pmod{4} = 0$,
then the number n is not a perfect in this case.

Remark 1. We know that the numbers from the forms $3k - 1$, $6k - 1$ can not be a perfect numbers [1,5], and the numbers of form $4k - 1$. But we can not say that all numbers of the form $n = ak - 1$ where $a > 2, k^3 - 1$ is not a perfect numbers, because if we assume $a = 7$, then we will have $7 \cdot 71 - 1 = 496$ and this number is a perfect number.

Also, the odd numbers of the form $n = 4k + 1$, it is possible to be a perfect numbers [2]. In special case, we present in the following theorem, the satisfy condition to be the numbers of the form $n = 8k + 1$, perfect numbers.

Theorem 10. suppose that the odd number n have the form $n = 8k + 1$ where $k^3 - 1$. Moreover, assume that $t(n)$ is even positive integer. then it is possible for the number n to be perfect if $t(n) \pmod{8} = 0$ or 4 .

Proof. We denote that $n \pmod{8} = 1$ or 7 , also we have $2n \pmod{8} = 2$ or 6 .

assume that d divisor to n , i.e., $d \frac{n}{d} = n$, so we have

$$d \frac{n}{d} \pmod{8} = 1 \text{ or } 7 \pmod{8}$$

Taking into account all possible possibilities for divisors $d, \frac{n}{d}$ we find

$$d + \frac{n}{d} \pmod{8} = 0 \text{ or } 2 \text{ or } 4 \text{ or } 6 \pmod{8}$$

Therefore,



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$s(n) = \sum_{d|n} \frac{d}{n} + \frac{n}{d} \equiv 0 \text{ or } 2 \text{ or } 4 \text{ or } 6 \pmod{8}$$

This is true if $t(n)$ takes one of two forms $t(n) = 2(4q + 1)$ or $t(n) = 2(4q + 3)$ where $q \equiv 0 \pmod{3}$. This means that it is possible for the number n to be perfect in this case. But in the case of $t(n) = 4q$ where $q \equiv 1 \pmod{3}$, we have

$$s(n) = \sum_{d|n} \frac{d}{n} + \frac{n}{d} \equiv 0 \text{ or } 4 \pmod{8}$$

Hence, we find that the number n is not a perfect number in the case of $t(n) = 4q$.

Corollary 1. Assume that $p \equiv 3, a \equiv 5, b \equiv 7$ and $n = pab$ is an odd integer Then the number n is not a perfect number where $p < a < b$ prime numbers.

Proof. Let us assume, for the sake of argument, that the number n is perfect, so we have

$$\sum_{d|n} \frac{d}{n} = 2$$

we have the divisors of the number n are $\{1, p, a, b, pa, pb, ab, pab\}$, therefore

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{p} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{pa} + \frac{1}{pb} + \frac{1}{ab} + \frac{1}{pab} &= 2 \\ \Leftrightarrow \frac{pab + pb + pa + a + b + p + 1}{pab} &= \frac{2pab - 1}{pab} \\ \Leftrightarrow pab + pb + pa + a + b + p + 1 &= (2p - 1)ab \\ \Leftrightarrow 2pab - pab - pb - pa - p &= a + b + 1 + ab \\ \Leftrightarrow p &= \frac{a + b + 1 + ab}{ab - a - b - 1} \end{aligned}$$

But the number p is written in the form



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{(a+1)(b+1)}{(a+1)(b+1) - 1 - 2(a+b)} \\
 &= \frac{(a+1)(b+1) + 2(a+b) - 2(a+b) + 1 - 1}{(a+1)(b+1) - 1 - 2(a+b)} \\
 &= \frac{(a+1)(b+1) - 1 - 2(a+b) + 1 + 2(a+b)}{(a+1)(b+1) - 1 - 2(a+b)}
 \end{aligned}$$

if we assume that $x = (a+1)(b+1) - 1 - 2(a+b)$ and $B = 2(a+b)$, we have

$$p = \frac{x+1}{x-1} + \frac{B}{x-1}$$

it is clear that $\frac{x+1}{x-1} \notin \mathbb{Z}$, the previous relationship tells us that the number p could be a non integer number, which we see clearly for $a = 5, b = 7$, so we get the value $p = 2.1818181818$ and this contradicts the assumption that the number p is always a prime number. We also note that $p < 3$ because

$$\begin{aligned}
 p &= \frac{a+b+1+ab}{ab-a-b-1} \\
 &= \frac{a+b+1+ab+(ab-a-b-1)-(ab-a-b-1)}{ab-a-b-1} \\
 &= 1 + \frac{2+2a}{ab-(a+b+1)} + \frac{2b}{ab-(a+b+1)}
 \end{aligned}$$

And since $ab-a-b-1 > 2+2a$ and $ab-a-b-1 > 2b$ for $a \geq 5$ and $b \geq 7$ it follows that,

$$\begin{aligned}
 p &= 1 + \frac{2+2a}{ab-(a+b+1)} + \frac{2b}{ab-(a+b+1)} \\
 &< 1 + \frac{2+2a}{2+2a} + \frac{2b}{2b} = 1 + 1 + 1 = 3
 \end{aligned}$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

This contradicts the assumption that $p^3 - 3$ is an odd prime number, and hence the number n is not a perfect number.

Theorem 11. Assume that $n = p p_1 p_2 \dots p_k$ is an odd integer number where $p^3 - 3$ is a prime number and p_1, p_2, \dots, p_k distinct odd prime numbers greater than p . then the number n is a perfect odd number if p satisfies the relationship,

$$p = \frac{\prod_{i=1}^k (p_i + 1)}{2 \prod_{i=1}^k p_i - \prod_{i=1}^k (p_i + 1)} \quad \text{or} \quad \prod_{i=1}^k (p_i + 1) = \frac{2p}{p+1} \prod_{i=1}^k p_i$$

Proof. since $n = p p_1 p_2 \dots p_k$ and p_1, p_2, \dots, p_k distinct odd prime numbers greater than p , then the divisors of the number n is

$$\{1, p, p_1, p_2, \dots, p_k, p p_1 p_2 \dots p_k\}$$

if we assume for the sake of argument that the number n is perfect, then the sum of these divisors must be $2p p_1 p_2 \dots p_k$, i.e.,

$$1 + p + p_1 + p_2 + \dots + p_k + p p_1 p_2 + \dots + p p_1 p_2 \dots p_k + p p_1 p_2 \dots p_k = 2p p_1 p_2 \dots p_k$$

then we find

$$(1 + p_1 + \dots + p_k + p p_1 p_2 + \dots + p p_1 p_2 \dots p_k) + p(1 + p_1 + \dots + p_k + p p_1 p_2 + \dots + p p_1 p_2 \dots p_k - p p_1 p_2 \dots p_k) = 0$$

$$p = \frac{-(1 + p_1 + \dots + p_k + p p_1 p_2 + \dots + p p_1 p_2 \dots p_k)}{(1 + p_1 + \dots + p_k + p p_1 p_2 + \dots + p p_1 p_2 \dots p_k - p p_1 p_2 \dots p_k)}$$

since,



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^k (p_i + 1) &= (p_1 + 1)(p_2 + 1)L (p_k + 1) \\ &= (1 + p_1 + L + p_k + p_1 p_2 + L + p_1 p_3 L p_k + p_1 p_2 L p_k) \end{aligned}$$

And $\prod_{i=1}^k p_i = p_1 p_2 L p_k$, then we have

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^k (p_i + 1) - 2 \prod_{i=1}^k p_i &= (p_1 + 1)(p_2 + 1)L (p_k + 1) - 2p_1 p_2 L p_k \\ &= (1 + p_1 + L + p_1 p_2 L p_k - 2p_1 p_2 L p_k) \\ &= (1 + p_1 + L - p_1 p_2 L p_k) \end{aligned}$$

Hence,

$$p = \frac{\prod_{i=1}^k (p_i + 1) - 2 \prod_{i=1}^k p_i}{\prod_{i=1}^k (p_i + 1) - 2 \prod_{i=1}^k p_i} = \frac{\prod_{i=1}^k (p_i + 1)}{2 \prod_{i=1}^k p_i - \prod_{i=1}^k (p_i + 1)}$$

Or

$$2p \prod_{i=1}^k p_i = (1 + p) \prod_{i=1}^k (p_i + 1) \quad \text{P} \quad \prod_{i=1}^k (p_i + 1) = \frac{2p}{1 + p} \prod_{i=1}^k p_i$$

Result 1. We know from theorem 6 that any odd perfect number n have the form $n = q^{4a+1} p_1^{2a_1} L p_k^{2a_k}$ and since n in theorem 11 have the form $n = p p_1 p_2 L p_k$ where $p^3 - 3$ is a prime number and p_1, p_2, L, p_k distinct odd prime numbers greater than p , then the number n is not a perfect odd number. Therefore, we conclude that any odd prime number p_j cannot be written in the form

$$p_j = \frac{\prod_{i=1}^k (p_i + 1)}{2 \prod_{i=1}^k p_i - \prod_{i=1}^k (p_i + 1)}$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

Or

$$p_j = \frac{\prod_{i=1}^k (p_i + 1)}{2 \prod_{i=1}^k p_i - \prod_{i=1}^k (p_i + 1)}$$

When $k \geq 3$.

We know from theorem 4 that if the number n has the form $n = p^k q^l$ where p, q distinct prime numbers then the number n cannot be a perfect number. Also, the number $n = \prod_{i=1}^k p_i^{a_i}$ where $p_i \geq 17$ distinct prime numbers and $a_i \geq 1$, cannot be a perfect number because

$$\frac{s(n)}{n} \leq \frac{17^{11}}{16^{11}} = 1.948131757 < 2$$

but what is the large number we can take it from the distinct prime numbers p_i greater or equal to fixed prime number p , such that n is not a perfect number. for this, we present the following definition and theorem.

Definition 4. we define the function $x(p) : P \longrightarrow [1, +\infty[$ as following

$$x(p) = \frac{\ln(2)}{\ln \left(\frac{p}{p-1} \right)}$$

If we assume that p_i are distinct prime numbers and $p = \min_i \{p_i\}$, then we called the

number $n = \prod_{i=1}^k p_i^{a_i}$ Ho-number. Where $k < \lceil x(p) \rceil$, $a_i \geq 1$, and P the set of all prime numbers, $\lceil x(p) \rceil$ the ceiling function of $x(p)$.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

Theorem 12. Ho-numbers is not a perfect numbers.

Proof. we have,

$$\begin{aligned} \frac{s(n)}{n} &= \left(1 + \frac{1}{p_1} + L + \frac{1}{p_1^{a_1}} + \dots + \frac{1}{p_k} + L + \frac{1}{p_k^{a_k}} + \dots\right) \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{p_1}} \cdot L \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{p_1}} \cdot L \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} = \frac{p_1}{p_1 - 1} \cdot L \cdot \frac{p_k}{p_k - 1} < \frac{p_1}{p_1 - 1} \cdot \frac{p_k}{p_k - 1} = 2 \end{aligned}$$

144442 444443
k once

Result 2. If we assume that p_1 is the smallest prime number within the standard form of the number n , which is written in the form $n = q^{4m+1} p_1^{2a_1} L p_k^{2a_k}$; $q \equiv 1 \pmod{4}$. Then, the number n can be a perfect odd number if the number of prime numbers p_k plus q greater than or equal to $\lceil x(p_1) \rceil$.

Remark 2.

Let the odd number n , as Ho-number, then

- (i). if we denote to Ho-number by $\text{Ho}(p, k) = \prod_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}$, then for any prime number $p = \min_i \{p_i\}$ or any $k < \lceil x(p) \rceil$, we have an infinitely many odd deficient numbers.
- (ii). it cannot be certain that the number n is not an Ore-number whatever it is n . This is consistent with Ore's conjecture, which states that a number that has an integer harmonic mean of its divisors must be an even number.

(iii). If we assume that the number n is an Ore-number, i.e., $H(n) = \frac{n t(n)}{s(n)} \hat{=} \phi^+$. then, it will be $H(n) > \frac{t(n)}{2}$ according to the definition of the Ho-number.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

5. References

- [1] – B.Dris J, 2008- Solving the Odd Perfect Number Problem: Some Old and New Approaches. De La Salle University, Manila, 127p.
- [2] - DEZA E, 2023- Perfect and Amicable Numbers. World Scientific, London, 437p.
- [3] - KNILL O, 2007- The Oldest Open Problem in Mathematics. NEU Math Circle.
- [4] – ORE O, 1948- On the Averages of the Divisors of a Number. Yale University.
- [5] - TOUCHARD J, 1953- On Prime Numbers and Perfect Numbers. Scripta Mathematica, Vol.19, 35-39.

The Kinetic Elements of the Material Point in its Plane Motion from the View of Neutrosophic Logic

Ahmad youssef Al-Khabour Dr. Mountajab Al-Hasan

^aAhmad Youssef Al-Khabour, , AL-Hasaka , Syria, E-Mail: ahmadkhaboor91@gmail.com

Al-Baath university – Faculty of Sciences-Department of Mathematics-Homs-Syria. E-mail: alhasanmountajab@gmail.com

Abstract:

In this paper we discuss the kinetic elements of the material neutrosophic plane material point, according to the neutrosophic logic, this is parallel to improve this logic to other science domains. Finally, we end paper by suggesting some problems for discussing.

1.Introduction

Many theoretical and practical science are improved from the classical to neutrosophic logic; for example: the statistics; the probability; biology and other. In 2023 the neutrosophic logic was extend to include the geometrical sense [3,5,6,7]; that allow to study the geometrical point and to generalize the geometrical point to the material one [14]. In [14]; the position, velocity and acceleration vectors of the material point were discussed for the plane motion of the material point in the neutrosophic plane

2. Materials and Methods (proposed work with more details)

The aim and importance of paper:

The aim of this paper is to generalize the kinetic elements of the material point in its plane movement from the classical to the neutrosophic logic; this include the momentum vector; the kinetic energy; and the vector of momentum moment; all in the neutrosophic logic science. The results of the paper can may have importance in the future.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 آب 2024
دمشق - سورية

We will use method that is a generalization of the method used in [14], which depends on the geometric ideas of neutrosophic straight line, plane, space, and the isometric transform [10], in addition to the mechanical idea of the position vector, the velocity vector, the acceleration vector, and mass and time in the neutrosophic logic, all in the plane motion of the material point [14].

3. Discussing Results

For the requirements of this paper, in the following we shortly introduce some necessary results published in this domain [14].

3.1. The Neutrosophic Real Numbers [1] :

The neutrosophic number is define by: $(W = a + bI)$, where a, b are classical real number and I is undefiant element, and:

$$0I = 0, I^n = I \cdot \text{For example: } w = 1 + 2I \text{ and } w = 3 = 3 + 0I.$$

3.2. The Deviation of Tow Neutrosophic Numbers [1] :

If $W_1 = a_1 + b_1I$ and $W_2 = a_2 + b_2I$, then we have:

$$\frac{W1}{W2} = \frac{a_1 + b_1I}{a_2 + b_2I} = \frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2(a_2 + b_2)} I$$

3.3. The Neutrosophic Field [2] :

Let K is a classical field. The corresponding neutrosophic field is:

$$K(I) = \langle K \cup I \rangle$$

3.4. The neutrosophic real number field [2,4]:

The neutrosophic real number field $R(I)$ is defined by:

$$R(I) = \{a + bI; a, b \in R\}.$$

We say that [8] $a + b \leq c + dI$ if and only if :
 $a \leq c, a + b \leq c + d$

3.5. The neutrosophic real plane $R^2(I)$ [6,7] :

$$R^2(I) = \{ (a + bI, c + dI) : a, b, c, d \in R \}$$

3.6. The isometry transform from R^2 to $R \times R$ [10]:

$$T: R^2(I) \rightarrow R \times R; T(a + bI, c + dI) = [(a, c), (a + b, c + d)]$$

3.7. The neutrosophic function for $X = x_1 + x_2I$ [11]:

Takes the form:

$$f(X) = f(x_1 + x_2I) = f(x_1) + I[f(x_1 + x_2) - f(x_1)]$$

3.8. The neutrosophic position vector [14]:

Let $M(X = x_1 + Ix_2, Y = y_1 + Iy_2)$ is a neutrosophic geometrical point. The position vector in definition has the form: $\vec{OM} = X\vec{I} + Y\vec{J}$, where: \vec{I} and \vec{J} are neutrosophic unit vectors, which have the forms: $\vec{I} = \vec{i}_1 + I\vec{i}_2, \vec{J} = \vec{j}_1 + I\vec{j}_2$, in which \vec{i}_1, \vec{i}_2 and \vec{j}_1, \vec{j}_2 are



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

a classical unit vectors.

3.9. Theorem [14]:

The Neutrosophic position vector is equivalent to the tow classical position vectors:

$$\overline{OM}_1 = x_1 \vec{i}_1 + y_1 \vec{j}_1, \overline{OM}_2 = (x_1 + x_2)(\vec{i}_1 + \vec{i}_2) + (y_1 + y_2)(\vec{j}_1 + \vec{j}_2).$$

3.10. The definition of Neutrosophic vector [14]:

The neutrosophic vector is defined as $\vec{U} = \vec{U}_1 + \vec{U}_2 I$, where \vec{U}_1, \vec{U}_2 are a classical vectors.

3.11. The derivation of the vector \vec{U} in definition is [14]:

$$\dot{\vec{U}} = \dot{\vec{U}}_1 + I[(\dot{\vec{U}}_1 + \dot{\vec{U}}_2) - \dot{\vec{U}}_1]$$

3.12. The neutrosophic material point [14]:

The Neutrosophic material point in definition is an geometrical neutrosophic point $M(X = x_1 + I x_2, Y = y_1 + I y_2)$ supplied with a neutrosophic mass $m = m_1 + I m_2$ and time $t = t_1 + I t_2$.

3.13. Theorem [14]:

The material neutrosophic point $M(X = x_1 + I x_2, Y = y_1 + I y_2)$ is equivalent to the tow classical material points: $M_1(x_1, y_1)$ with mass m_1 and time t_1 , $M_2(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ with the mass $m_1 + m_2$ and time $t_1 + t_2$.

Now, we will discuss the results of this paper consisting in the kinetic elements of the material point in its plane motion, from the view of the neutrosophic logic.

3.14. The kinetic elements of the material point in its plane motion, from the view of the neutrosophic logic.

3.14.a. The Neutrosophic momentum vector of the material point in definition has the form:

$$\vec{P} = m \vec{V}$$

Now, suppose that: $\vec{P} = \vec{P}_1 + I \vec{P}_2 = P_X \vec{i} + P_Y \vec{j}$

where \vec{P}_1, \vec{P}_2 are the classical momentum's vectors and:

$$P_X = P_{x_1} + I P_{x_2},$$

$$P_Y = P_{y_1} + I P_{y_2}$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

Then, we have the following conclusion.

Conclusion1:

The Neutrosophic momentum vector \vec{P} is equivalent the two classical momentum vectors:

$$\vec{P}_1 = m_1 \vec{V}_1 \text{ for } M_1(x_1, y_1),$$

$$\text{and } \vec{P}_2 = (m_1 + m_2)(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) \text{ for } M_2(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

Proof:

We have

$$\begin{aligned} \vec{P} &= m \vec{V} = (m_1 + Im_2)(\vec{V}_1 + I\vec{V}_2) \\ &= m_1 \vec{V}_1 + I[m_2 \vec{V}_1 + (m_1 + m_2)\vec{V}_2], \end{aligned}$$

$$\text{Finally: } \vec{P} = \vec{P}_1 + I\vec{P}_2 = m_1 \vec{V}_1 + I[m_2 \vec{V}_1 + (m_1 + m_2)\vec{V}_2],$$

Now, according to the isometric transform:

$$T: R^2(I) \rightarrow R^2 \times R^2$$

we have:

$$\begin{aligned} T(\vec{P}) &= T\{m_1 \vec{V}_1 + I[m_2 \vec{V}_1 + (m_1 + m_2)\vec{V}_2]\} = \\ &= [m_1 \vec{V}_1, (m_1 + m_2)(\vec{V}_2 + \vec{V}_1)] \end{aligned}$$

Hence, we arrive to the fact that the neutrosophic momentum vector \vec{P} is equivalent to the tow classical momentum vectors:

$$\vec{P}_1 = m_1 \vec{V}_1 \text{ for } M_1(x_1, y_1)$$

$$\vec{P}_2 = (m_1 + m_2)(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) \text{ for } M_2(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

3.14.b. The Neutrosophic kinetic energy of the Neutrosophic material point:

Let $M(X = x_1 + I x_2, Y = y_1 + I y_2)$ a neutrosophic material point of neutrosophic mass $m = m_1 + I m_2$ and neutrosophic time $t = t_1 + I t_2$, and of neutrosophic velocity vector

$\vec{V} = \vec{V}_1 + I \vec{V}_2$ [2]. Then the neutrosophic kinetic energy of this of this neutrosophic point in definition:

$$T = T_1 + I T_2 = \frac{1}{2} m V^2$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

where $V^2 = \vec{V} \cdot \vec{V}$, and T_1, T_2 are classical kinetic energies.

Conclusion 2:

The neutrosophic kinetic energy T is equivalent to two classical kinetic energies:

The first: $T_1 = \frac{1}{2} m_1 \vec{V}_1^2$ for the classical material point $M_1(x_1, y_1)$ of mass m_1 and classical velocity \vec{V}_1 and time t_1 ; the second: $T_2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) (\vec{V}_1 + \vec{V}_2)^2$ for the classical material point $M_2(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ of mass $(m_1 + m_2)$ and time $(t_1 + t_2)$ and classical velocity $(\vec{V}_1 + \vec{V}_2)$.

Proof:

we have:

$$\begin{aligned} T = T_1 + I T_2 &= \frac{1}{2} m \vec{V}^2 = \frac{1}{2} (m_1 + I m_2) (\vec{V}_1 + I \vec{V}_2)^2 = \\ &= \frac{1}{2} (m_1 + I m_2) [\vec{V}_1^2 + I (\vec{V}_2^2 + 2 \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2)] = \\ &= \frac{1}{2} [m_1 \vec{V}_1^2 + I m_1 (\vec{V}_2^2 + 2 \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) + I m_2 \vec{V}_1^2 + I m_2 (\vec{V}_2^2 + 2 \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2)] \\ &= \frac{1}{2} \{ m_1 \vec{V}_1^2 + I [m_2 \vec{V}_1^2 + (m_1 + m_2) (\vec{V}_2^2 + 2 \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2)] \} \end{aligned}$$

Hence, according to the isometric transform:

$$T: R(I) \rightarrow R \times R$$

defined as:

$$\begin{aligned} T(T) &= T \left(\frac{1}{2} \{ m_1 \vec{V}_1^2 + I [m_2 \vec{V}_1^2 + (m_1 + m_2) (\vec{V}_2^2 + 2 \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2)] \} \right) = \\ &= \left[\frac{1}{2} m_1 \vec{V}_1^2, \frac{1}{2} (m_1 + m_2) (\vec{V}_1^2 + \vec{V}_2^2 + 2 \vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2) \right] \\ &= \left[\frac{1}{2} m_1 \vec{V}_1^2, \frac{1}{2} (m_1 + m_2) (\vec{V}_1 + \vec{V}_2)^2 \right] \end{aligned}$$

we arrive to the proof:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 \vec{V}_1^2$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$T_2 = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) (\vec{V}_1 + \vec{V}_2)^2$$

For the requirements of the following subsection, we need to generalized the following idea from classical to neutrosophic logic.

3.14.b.1. The vectorial product in neutrosophic sense:

Let $\vec{U} = \vec{U}_1 + I\vec{U}_2 = A\vec{I} + B\vec{J} + C\vec{K}$, $\vec{W} = \vec{W}_1 + I\vec{W}_2 = X\vec{I} + Y\vec{J} + Z\vec{K}$ two neutrosophic vectors from $\mathfrak{R}^3(I)$, where $\vec{U}_1, \vec{U}_2, \vec{W}_1, \vec{W}_2$ are vectors from \mathfrak{R}^3 , and $A = a_1 + Ia_2$, $B = b_1 + Ib_2$, $C = c_1 + Ic_2$, $X = x_1 + Ix_2$, $Y = y_1 + Iy_2$, $Z = z_1 + Iz_2$ from $\mathfrak{R}(I)$, $\vec{I} = \vec{i}_1 + I\vec{i}_2$, $\vec{J} = \vec{j}_1 + I\vec{j}_2$, $\vec{K} = \vec{k}_1 + I\vec{k}_2$ are orthonormal neutrosophic cartesian base of $\mathfrak{R}^3(I)$. Then the neutrosophic vector product of the vectors \vec{U}, \vec{W} in definition:

$$\vec{U} \wedge \vec{W} = \vec{P} + I\vec{Q} = \vec{U}_1 \wedge \vec{W}_1 + I(\vec{U}_1 \wedge \vec{W}_2 + \vec{U}_2 \wedge \vec{W}_1 + \vec{U}_2 \wedge \vec{W}_2) = \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ A & B & C \\ X & Y & Z \end{vmatrix},$$

Conclusion 3:

The neutrosophic vector product $\vec{U} \wedge \vec{W}$ is equivalent to two classical vector products:

$$\vec{U}_1 \wedge \vec{W}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}, \text{ in classical space } \mathfrak{R}^3 \text{ with classical base } (\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1),$$

$$(\vec{U}_1 + \vec{U}_2) \wedge (\vec{W}_1 + \vec{W}_2) = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 + \vec{i}_2 & \vec{j}_1 + \vec{j}_2 & \vec{k}_1 + \vec{k}_2 \\ a_1 + a_2 & b_1 + b_2 & c_1 + c_2 \\ x_1 + x_2 & y_1 + y_2 & z_1 + z_2 \end{vmatrix}, \text{ in classical space } \mathfrak{R}^3 \text{ with classical}$$

base $(\vec{i}_1 + \vec{i}_2, \vec{j}_1 + \vec{j}_2, \vec{k}_1 + \vec{k}_2)$.

Proof.

Evaluating the above determinate, we have:

$$\begin{aligned} \vec{U} \wedge \vec{W} = \vec{P} + I\vec{Q} = & [(b_1 + Ib_2)(z_1 + Iz_2) - (c_1 + Ic_2)(y_1 + Iy_2)] (\vec{i}_1 + I\vec{i}_2) + \\ & + [(c_1 + Ic_2)(x_1 + Ix_2) - (a_1 + Ia_2)(z_1 + Iz_2)] (\vec{j}_1 + I\vec{j}_2) + \\ & + [(a_1 + Ia_2)(y_1 + Iy_2) - (b_1 + Ib_2)(x_1 + Ix_2)] (\vec{k}_1 + I\vec{k}_2) \end{aligned}$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 آب 2024
دمشق - سورية

or

$$\begin{aligned} \vec{U} \wedge \vec{W} = & (b_1 z_1 - c_1 y_1) \vec{i}_1 + (c_1 x_1 - a_1 z_1) \vec{j}_1 + (a_1 y_1 - b_1 x_1) \vec{k}_1 + \\ & + I[(b_1 z_1 - c_1 y_1) \vec{i}_2 + (c_1 x_1 - a_1 z_1) \vec{j}_2 + (a_1 y_1 - b_1 x_1) \vec{k}_2 + \\ & + [(b_1 z_2 + b_2 z_1 + b_2 z_2) - (c_1 y_2 + c_2 y_1 + c_2 y_2)](\vec{i}_1 + \vec{i}_2) + \\ & + [(c_1 x_2 + c_2 x_1 + c_2 x_2) - (a_1 z_2 + a_2 z_1 + a_2 z_2)](\vec{j}_1 + \vec{j}_2) + \\ & + [(a_1 y_2 + a_2 y_1 + a_2 y_2) - (b_1 x_2 + b_2 x_1 + b_2 x_2)](\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \}, \end{aligned}$$

Now, according to the isometric transform:

$$T: R^3(I) \rightarrow R^3 \times R^3$$

after several calculus operations, we have:

$$\begin{aligned} T(\vec{U} \wedge \vec{W}) = & \{(b_1 z_1 - c_1 y_1) \vec{i}_1 + (c_1 x_1 - a_1 z_1) \vec{j}_1 + (a_1 y_1 - b_1 x_1) \vec{k}_1, \\ & [(b_1 + b_1)(z_1 + z_1) - (c_1 + c_1)(y_1 + y_1)](\vec{i}_1 + \vec{i}_2) + \\ & [(c_1 + c_1)(x_1 + x_1) - (a_1 + a_1)(z_1 + z_1)](\vec{j}_1 + \vec{j}_2) + \\ & [(a_1 + a_1)(y_1 + y_1) - (b_1 + b_1)(x_1 + x_1)](\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \}, \end{aligned}$$

or

$$T(\vec{U} \wedge \vec{W}) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 & \vec{i}_1 + \vec{i}_2 & \vec{j}_1 + \vec{j}_2 & \vec{k}_1 + \vec{k}_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 & a_1 + a_2 & b_1 + b_2 & c_1 + c_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 & x_1 + x_2 & y_1 + y_2 & z_1 + z_2 \end{array} \right),$$

so, we arrive to the proof that the neutrosophic vector product $\vec{U} \wedge \vec{W}$ is equivalent to two classical vector products:

$$\vec{U}_1 \wedge \vec{W}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix}, \text{ in classical space } \mathfrak{R}^3 \text{ with classical base } (\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1),$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$(\vec{U}_1 + \vec{U}_2) \wedge (\vec{W}_1 + \vec{W}_2) = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 + \vec{i}_2 & \vec{j}_1 + \vec{j}_2 & \vec{k}_1 + \vec{k}_2 \\ a_1 + a_2 & b_1 + b_2 & c_1 + c_2 \\ x_1 + x_2 & y_1 + y_2 & z_1 + z_2 \end{vmatrix}, \text{ in classical space } \mathfrak{R}^3 \text{ with classical}$$

base $(\vec{i}_1 + \vec{i}_2, \vec{j}_1 + \vec{j}_2, \vec{k}_1 + \vec{k}_2)$.

3.14.c. The neutrosophic momentum moment vector of the neutrosophic material point in its neutrosophic plane motion:

Let $M(x_1 + Ix_2, y_1 + Iy_2)$ a neutrosophic plane material point of mass $m = m_1 + Im_2$ and time $t = t_1 + It_2$ and vector position $\vec{r} = \vec{OM} = \vec{r}_1 + I\vec{r}_2 = X\vec{I} + Y\vec{J}$ and velocity vector $\vec{V} = \vec{V}_1 + I\vec{V}_2 = \dot{X}\vec{I} + \dot{Y}\vec{J}$ and momentum $\vec{P} = \vec{P}_1 + I\vec{P}_2 = \mathbf{m}\vec{V} = \mathbf{m}(\dot{X}\vec{I} + \dot{Y}\vec{J})$ (where \dot{X} and \dot{Y} denote the neutrosophic time derivative of X and Y , respectively [2]). Then, the momentum moment vector of the planer point M with respect to neutrosophic origin O , in definition is:

$$\vec{\sigma}_O = \vec{\sigma}_{O_1}^{(1)} + I\vec{\sigma}_{O_2}^{(2)} = \vec{r} \wedge \vec{P}$$

where: $\vec{\sigma}_{O_1}^{(1)}, \vec{\sigma}_{O_2}^{(2)}$ are classical momentum moment vectors with respect to the classical origins O_1, O_2 , respectively, and \vec{r} is the neutrosophic position vector of the neutron-sophic material point M .

Conclusion 4:

In neutrosophic cartesian coordinate system, for the neutrosophic plane material point $M(X = x_1 + Ix_2, Y = y_1 + Iy_2)$ of mass $m = m_1 + Im_2$, we have:

$$\vec{\sigma}_O = \vec{\sigma}_{O_1}^{(1)} + I\vec{\sigma}_{O_2}^{(2)} = \vec{r} \wedge \vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ X & Y & 0 \\ m\dot{X} & m\dot{Y} & 0 \end{vmatrix} = m(X\dot{Y} - \dot{X}Y)\vec{K}$$

Conclusion 5:

The neutrosophic momentum moment vector $\vec{\sigma}_O$ is equivalent to two classical momentum moment vectors;

the first one is:

$$\vec{\sigma}_{O_1}^{(1)} = \vec{r}_1 \wedge \vec{P}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ x_1 & y_1 & 0 \\ m_1\dot{x}_1 & m_1\dot{y}_1 & 0 \end{vmatrix} = m_1(x_1\dot{y}_1 - \dot{x}_1y_1)\vec{k}_1, \quad \text{where } \vec{r}_1 = x_1\vec{i}_1 + y_1\vec{j}_1, \text{ and}$$

$$\vec{P}_1 = m_1\vec{V}_1 = m_1(\dot{x}_1\vec{i}_1 + \dot{y}_1\vec{j}_1) \text{ in classical space } \mathfrak{R}^3 \text{ with classical base } (\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1),$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

the second one is:

$$\begin{aligned} \vec{\sigma}_{O_1}^{(1)} = \vec{r}_2 \wedge \vec{P}_2 &= \begin{vmatrix} \vec{i}_1 + \vec{i}_2 & \vec{j}_1 + \vec{j}_2 & \vec{k}_1 + \vec{k}_2 \\ x_1 + x_2 & y_1 + y_2 & 0 \\ (m_1 + m_2)(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) & (m_1 + m_2)(\dot{y}_1 + \dot{y}_2) & 0 \end{vmatrix} \\ &= (m_1 + m_2)[(x_1 + x_2)(\dot{y}_1 + \dot{y}_2) - (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)(y_1 + y_2)](\vec{k}_1 + \vec{k}_2) \end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned} \vec{r}_2 &= (x_1 + x_2)(\vec{i}_1 + \vec{i}_2) + (y_1 + y_2)(\vec{j}_1 + \vec{j}_2), \\ \vec{P}_2 &= (m_1 + m_2)(\vec{V}_1 + \vec{V}_2) = (m_1 + m_2)[(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)(\vec{i}_1 + \vec{i}_2) + (\dot{y}_1 + \dot{y}_2)(\vec{j}_1 + \vec{j}_2)], \quad \text{in classical space } \mathfrak{R}^3 \text{ with classical base } (\vec{i}_1 + \vec{i}_2, \vec{j}_1 + \vec{j}_2, \vec{k}_1 + \vec{k}_2). \end{aligned}$$

Proof.

The proof depends on the definition of neutrosophic vector product and conclusion 4 and the definition of the neutrosophic momentum moment vector for the planer neutrosophic material point \mathbf{M} , taking into account that in this case we have:

$$a_1 = x_1, a_2 = x_2, b_1 = y_1, b_2 = y_2, c_1 = c_2 = 0, x_1 = m_1 \dot{x}_1, y_1 = m_1 \dot{y}_1, z_1 = 0,$$

and⁹

⁹ We have:

$$X = m \dot{X} = (m_1 + I m_2)(\dot{x}_1 + I \dot{x}_2) = m_1 \dot{x}_1 + I[m_2 \dot{x}_1 + (m_1 + m_2) \dot{x}_2],$$

$$Y = m \dot{Y} = (m_1 + I m_2)(\dot{y}_1 + I \dot{y}_2) = m_1 \dot{y}_1 + I[m_2 \dot{y}_1 + (m_1 + m_2) \dot{y}_2],$$

$$Z = 0 = 0 + I 0$$

$$\vec{\sigma}_{O_1}^{(1)} = \vec{r}_1 \wedge \vec{P}_1 = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ x_1 & y_1 & 0 \\ m_1 \dot{x}_1 & m_1 \dot{y}_1 & 0 \end{vmatrix} = m_1(x_1 \dot{y}_1 - \dot{x}_1 y_1) \vec{k}_1, \quad \text{in classical space } \mathfrak{R}^3 \text{ with}$$

classical base $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$, the second one is:



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$x_2 = m_2 \dot{x}_1 + (m_1 + m_2) \dot{x}_2, y_2 = m_2 \dot{y}_1 + (m_1 + m_2) \dot{y}_2, z_2 = 0,$$

hence

$$x_1 + x_2 = (m_1 + m_2) (\dot{x}_1 + \dot{x}_2), y_1 + y_2 = (m_1 + m_2) (\dot{y}_1 + \dot{y}_2), z_1 + z_2 = 0,$$

so, the neutrosophic momentum moment vector $\vec{\sigma}_O$ is equivalent to two classical momentum moment vectors;

the first one is:

$$\vec{\sigma}_{O_1}^{(1)} = \vec{r}_2 \wedge \vec{P}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 + \vec{i}_2 & \vec{j}_1 + \vec{j}_2 & \vec{k}_1 + \vec{k}_2 \\ x_1 + x_2 & y_1 + y_2 & 0 \\ (m_1 + m_2)(\dot{x}_1 + \dot{x}_2) & (m_1 + m_2)(\dot{y}_1 + \dot{y}_2) & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (m_1 + m_2) [(x_1 + x_2)(\dot{y}_1 + \dot{y}_2) - (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)(y_1 + y_2)] (\vec{k}_1 + \vec{k}_2),$$

in classical space \mathfrak{R}^3 with classical base $(\vec{i}_1 + \vec{i}_2, \vec{j}_1 + \vec{j}_2, \vec{k}_1 + \vec{k}_2)$, and the proof is completed.

3.14.d. Conclusions and suggestions:

I) *Conclusions:* In paper we discuss the neutrosophic kinetic elements of the neutrosophic planer material point.

II) *Suggestions:* We suggest the following problems for discussing: g

- Discussing the neutrosophic kinematics elements of the neutrosophic planer material point.
- Discussing the neutrosophic kinetic and kinematics elements of the neutrosophic 3D material point.
- Discussing the neutrosophic dynamic Newton lows of the neutrosophic 3D material point.

References

- [1] F .Smarandache. "Introduction to Neutrosophic statistics", Sitech-Education Publisher, PP:34-44. 2014.
- [2] F .Smarandache. "Finite Neutrosophic Complex Numbers, by W. B. Vasantha Kandasamy". Zip pubulsher, Columbus, Ohio, USA, PP1-16, 2011.

in classical space \mathfrak{R}^3 with classical base $(\vec{i}_1 + \vec{i}_2, \vec{j}_1 + \vec{j}_2, \vec{k}_1 + \vec{k}_2)$, and the proof is completed.

3.14.d. Conclusions and suggestions:



**المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية**

- [3] Y. Alhasan., "Concepts of Neutrosophic Complex Numbers", International Journal of Neutrosophic Science, Vol.8, 9-18, 2020.
- [4] R. Alhamido, M.Ismail, F .Smarandache; "The Polar form of a Neutrosophic Complex Number", International Journal of Neutrosophic Science, Vol.10, 36-44, 2020.
- [5] A. A Salama; Hewayda Elghawalby; M.S, Dabash; A.M. NASR, "Retrac Neutrosophic Crisp System For Gray Scale Image", Asian Journal Of Mathematics and Computer Research, Vol 24, 104-117, (2018).
- [6] F. smarandache. "Neutrosophy and Neutrosophic Logic, First International Conference on Neutrosophy, neutrosophic Logic, Set, Probability, and Statistics", University of New Mexico, Gallup, NM87301, USA 2002.
- [7] M. Abdel-Basset; E. Mai. Mohamed; C. Francisco; H. Z. Abd EL-Nasser. "Cosine similarity measures of bipolar neutrosophic set for diagnosis of bipolar disorder diseases", Artificial Intelligence in Medicine Vol. 101, 101735, (2019).
- [8] M. Abdel-Basset; E. Mohamed; G. Abdullah; and S. Florentin. "A novel model for evaluation Hospital medical care systems based on plithogenic sets", Artificial Intelligence in Medicine 100 (2019), 101710.
- [9] M. Abdel-Basset; G. Gunasekaran Mohamed; G. Abdullah. C. Victor, "A Novel Intelligent Medical Decision Support Model Based on soft Computing and Iot", IEEE Internet of Things Journal, Vol. 7, (2019).
- [10] M. Abobala, Ahmad Hatip."An Algebraic Approach Neutrosophic Euclidean Geometry ", Neutrosophic Sets and Systems, Vol 43, (2021).
- [11] A. A Salama. "Basic Structure of Some Classes of Neutrosophic Crisp Nearly Open Sets and Possible Application to GIS Topology".Neutrosophic Sets and Systems,Vol.7,18-22, (2015).
- [12] A. A Salama; F. Smarandache. "Neutrosophic Set Theory", Neutrosophic Sets and Systems,Vol. 5, 1-9, (2014).
- [13] F. Smarandache, "The Neutrosophic Triplet Group and its Application to physics", Seminar Universidad National de Quilmes, Department of science and Technology, Beunos Aires, Argentina, 20 June 2014.
- [14] F. Al-Hasan, M.F. Alaswad " A Study of the Movement of a Neutrosophic Material Point in the Neutrosophic Plane by Using a Neutrosophic AH-Isometry ", Prospects for Applied Mathematics and data Analysis (PAMDA), Vol. 02, No. 01, PP. 08-18, 2023.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

Acquiring Topological and Geometric Concepts among First Grade Students Using Cognitive Apprenticeship

Dr. Fatema Al-Alyan

Abstract:

The aim of the research was to identify the effect of using cognitive apprenticeship in developing topological and geometric concepts among first-grade students. The quasi-experimental approach was used by teaching the two units (Solids, geometric shapes, congruence) in mathematics for the first grade for the second semester. The two research groups consisted of (37) male and female students for the experimental group, and (36) male and female students for the control group. To achieve the objectives of the research, two tests of topological concepts and geometric concepts were prepared, as well as a teacher's guide for the two units according to the cognitive apprenticeship strategy. The results of the research proved the positive impact of using the cognitive apprenticeship strategy in developing topological and geometric concepts among first grade students, and the existence of a significant impact as the value of the effect size exceeded (0.8). Accordingly, the researcher presented a set of recommendations and proposals, the most important of which was to focus on developing metacognitive thinking among students through teaching mathematics through teachers using cognitive apprenticeship, and conducting a study on the relationship between topological and geometric concepts and creative thinking among students, and obstacles to using cognitive apprenticeship with children.

- **Keywords:** Cognitive Apprenticeship, Topological Concepts, Geometric Concepts, First Grade Students.

**تنمية المفاهيم التوبولوجية والهندسية لدى تلاميذ الصف الأول الأساسي باستخدام
التلمذة المعرفية**

د. فاطمه العليان

(سوريا، جامعة دمشق، كلية التربية الثالثة)

ملخص البحث:

هدف البحث إلى تعرف أثر استخدام التلمذة المعرفية في تنمية المفاهيم التوبولوجية والهندسية لدى تلاميذ الصف الأول الأساسي، إذ أستخدم المنهج شبه التجريبي من خلال دروس الفصل السابع للفصل الأول (المجسّمات، الأشكال الهندسية،



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

التطابق) في مادة الرياضيات للصف الأول الأساسي للفصل الدراسي الأول للعام (2022-2023م)، وتكونت مجموعتي البحث من (73) من تلاميذ الصف الأول الأساسي منهم (37) تلميذاً وتلميذة للمجموعة التجريبية، و(36) تلميذاً وتلميذة للمجموعة الضابطة. ولتحقيق أهداف البحث تم إعداد اختبائي المفاهيم التوبولوجية والمفاهيم الهندسة ودليلاً للمعلمة للوحدتين وفقاً لاستراتيجية التلمذة المعرفية. وقد أثبتت نتائج البحث عن الأثر الإيجابي لاستخدام استخدام استراتيجية التلمذة المعرفية في تنمية المفاهيم التوبولوجية والهندسة لدى تلاميذ الصف الأول الأساسي، ووجود أثر كبير إذ تجاوزت قيمة حجم الأثر (0,8)، وبناء على ذلك قدمت الباحثة مجموعة من التوصيات والمقترحات كان أهمها الاهتمام بتنمية التفكير ما وراء المعرفي لدى التلاميذ من خلال تدريس الرياضيات وفق التلمذة المعرفية، وإجراء دراسة حول علاقة المفاهيم التوبولوجية والهندسية بالتفكير الإبداعي لدى التلاميذ، ومعوقات استخدام التلمذة المعرفية في تعليم الأطفال.

- الكلمات المفتاحية: التلمذة المعرفية، المفاهيم التوبولوجية، المفاهيم الهندسية، تلاميذ الصف الأول الأساسي.

- مقبمة:

تعد الطفولة المرحلة العمرية التي تُزرع فيها القيم والمبادئ والأخلاق والأفكار والاتجاهات والخبرات والمعارف والمفاهيم، فالطفل شديد التأثر بالبيئة المحيطة به ولا سيما البيئة التعليمية، وانطلاقاً من ذلك يزيد الاهتمام بالطفولة من قبل التربويين والباحثين، قديماً وفي الفترات الأخيرة، ويؤكدون دوماً على مواكبة الاتجاهات التربوية الحديثة، خاصة في مجال إكساب المفاهيم. وبما أن الرياضيات تعدّ من أهم المواد الأساسية للأطفال فمن المهم الاهتمام بعملية إكسابهم المفاهيم الرياضية بشكل صحيح وفعال، خاصة المفاهيم التوبولوجية والهندسية، فالنمو العقلي لمرحلة ما قبل العمليات للمفاهيم تستمر حتى السابعة تقريباً. وتتميز هذه المرحلة بتحول نوعية التفكير من الخبرة الحسية المباشرة إلى قدرة الذاكرة على الاحتفاظ بالصورة العقلية والقدرة على استنباط القواعد الأولية" (سلامة، 2004، 15).

وبالتالي تتكون لدى تلميذ الصف الأول الأساسي هذه المفاهيم الأولية التي تعدّ بمثابة اللبنة الأولى لمفاهيم أكبر وأعمق، إذ يعتمد اكتساب الطفل للمفهوم الجديد على المفاهيم السابقة لديه. وتعدّ المفاهيم التوبولوجية والهندسية مهمة لدراسة أشكال الأجسام، وتعتمد المفاهيم التوبولوجية على عدد الأجزاء وعدد الفجوات في جسم ما، وتصنيف هذه الأجسام في مجموعات من أنواع مختلفة. كما تعدّ المفاهيم الهندسية أحد الفروع الأساسية للرياضيات التي تدرّس القياس والمساحات، وتعتمد المفاهيم التوبولوجية على عدد الأجزاء وعدد الفجوات في جسم ما، وتصنيف هذه الأجسام في مجموعات من أنواع مختلفة. كما تعدّ المفاهيم الهندسية أحد الفروع الأساسية للرياضيات التي تدرّس القياس والمساحات وتشكيل الأشياء من وجهة نظر هيكلية، إذ يتم دراسة الهندسة في مراحل أعلى من خلال الهندسة المستوية والهندسة الفراغية، ويبدأ اكتسابها لدى المتعلم منذ الصغر،



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

فإذا ما تم اكتسابها بشكل سليم ازدادت قدرة المتعلم على فهمها واستخدامها لاحقاً، ويتكون لديه الأساس المتين للمفاهيم الرياضية الهندسية في المراحل اللاحقة. وتعد استراتيجيّة التلمذة المعرفيّة إحدى استراتيجيات التدريس البنائية التي تنمي مهارات التفكير ما وراء المعرفي في الرياضيات، وبما أنّ مادة الرياضيات هي مادة الفكر وإشغال العقل، ولها دور كبير في زيادة قدرة الفرد على مواجهة تحديات العصر، وعلى مواكبة التقدم العلمي والتكنولوجي المتسارع؛ لذا يجب أن يسعى المعنون في تدريس مواد الرياضيات التركيز على اكتساب المفاهيم الرياضية ولا سيما المفاهيم التوبولوجيّة والهندسيّة من خلال تطبيق المعرفة وتوظيفها باستخدام طرائق التفكير ما وراء المعرفة، ممّا يعمق اكتسابهم لتلك المفاهيم. وبذلك تصبح لدى التلميذ القدرة على حل المشكلات وتفسير المعلومات والمقارنة وطرح الأسئلة وتطبيق المعرفة في سياقات جديدة غير مألوقة (Taylor, 2021, 9)، إذ تعد استراتيجيّة التلمذة المعرفيّة مناسبة لمعالجة مشكلة جمود المعرفة في المدارس، وتفعيل عمليات التفكير واستخدامها في سياقات تعليمية واقعية ومتنوعة (العتيبي والفهد، 2020، 18)، حيث تقوم على خلق بيئة تعليمية تقوم على النمذجة، والتوجيه، وتوفير السقالات، ودعم وتعزيز مشاركة المتعلمين المجتمعية، وتشجيعهم على أن يصبحوا خبراء (Minshew et a, 2021, 2). من هنا جاء البحث الحالي ليلسّط الضوء على تنمية المفاهيم التوبولوجيّة والهندسيّة لدى تلاميذ الصفّ الأوّل الأساسي باستخدام التلمذة المعرفيّة.

- مشكلة البحث:

تنطق مشكلة البحث الحالي من خلال الحاجة إلى تعرّف أثر استخدام التلمذة المعرفيّة في تنمية المفاهيم التوبولوجيّة والهندسيّة لدى تلاميذ الصفّ الأوّل الأساسي، فمن خلال خبرة الباحثة في الإشراف على الطلبة المعلمين في تدريس تلاميذ الحلقة الأولى من التعليم الأساسي تبين وجود ضعف لديهم في المفاهيم الرياضيّة ومن ضمنها مفاهيم التوبولوجي والهندسة، حيث أجريت دراسة استطلاعية على عينة من معلمي الصفّ الأوّل الأساسي، بلغ عددهم (30) إذ أكدوا أن أبرز تلك المفاهيم الرياضية هي المفاهيم التوبولوجيّة والهندسيّة. نتيجة لذلك تم الرجوع إلى بعض الدراسات السابقة ذات الصلة، وتبين أهمية المفاهيم التوبولوجيّة والهندسيّة لهم في هذه المرحلة. إذ أثبتت دراسة شومان والشحادات (2020) حول تدريس التوبولوجي في الرياضيات لدى التلاميذ الأطفال وجود فرق دال إحصائياً بين متوسطي درجات مجموعة البحث في التطبيقين القبلي والبعدي لاختبار التفكير البصري لصالح التطبيق البعدي. وأن استخدام اليديويات في تدريس التوبولوجي له أثر كبير على تنمية كل من التفكير البصري والاتجاه نحو الرياضيات لدى تلاميذ المرحلة الابتدائية، كما بينت نتائج دراسة الفريح والشلهوب (2022) أن معلمات الرياضيات يقدّرن مستوى استخدامهن لمهارات المحسوسات اليدوية في تدريس الرياضيات للمرحلة الابتدائية بمستوى متوسط، وأخذت اللوحة الهندسية أعلى رتبة، وعدم وجود فروق ذات دلالة إحصائية تعزى لمغزير (المؤهل والخبرة والتدريب). كما أثبتت عدد من الدراسات السابقة فاعلية استخدام استراتيجيّة التلمذة المعرفيّة في مرحلة التعليم



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

الأساسي لا سيما في مواد الرياضيات، مثل دراسة كل من الجندي (2020) التي بينت فاعلية استخدام نموذج التلمذة المعرفية لتنمية حل المسألة الرياضية اللفظية والنزعة الرياضياتية المنتجة لدى تلاميذ المرحلة الابتدائية، وعبد الفتاح وصالحه (2024) التي أكدت فاعلية استراتيجية مقترحة قائمة التلمذة المعرفية في تنمية عمق المعرفة الرياضية والفهم العميق في الرياضيات لدى التلاميذ. مما سبق يبرز السؤال الرئيس للبحث من خلال الآتي: ما أثر استخدام التلمذة المعرفية في تنمية المفاهيم التوبولوجية والهندسية لدى تلاميذ الصف الأول الأساسي؟

– **أهمية البحث:** تبرز أهمية البحث من خلال الآتي:

- ضرورة إعداد التلاميذ الأطفال للمستقبل لمواكبة التقدم المعرفي والتكنولوجي.
- توجيه اهتمام معلمي الصفوف نحو استخدام التلمذة المعرفية في تدريس المفاهيم الرياضية.
- تقديم برنامج تعليمي يساهم في تنمية المفاهيم التوبولوجية والهندسية لدى تلاميذ الصف الأول الأساسي.
- قد يساعد البحث الحالي في الاستفادة من البرنامج التعليمي المقترح القائم على التلمذة المعرفية وتطبيقه.

– **أهداف البحث:** هدف البحث إلى:

- تعرف أثر استخدام التلمذة المعرفية في تنمية المفاهيم التوبولوجية لدى تلاميذ الصف الأول الأساسي.
- تعرف أثر استخدام التلمذة المعرفية في تنمية المفاهيم الهندسية لدى تلاميذ الصف الأول الأساسي.

– **أسئلة البحث:** سعى البحث إلى الإجابة عن الأسئلة الآتية:

- ما أثر استخدام التلمذة المعرفية في تنمية المفاهيم التوبولوجية لدى تلاميذ الصف الأول الأساسي؟
- ما أثر استخدام التلمذة المعرفية في تنمية المفاهيم الهندسية لدى تلاميذ الصف الأول الأساسي؟

– **متغيرات البحث:** وتضمنت الآتي:

- المتغير المستقل: (استراتيجية التلمذة المعرفية).
- المتغيرات التابعة: (المفاهيم التوبولوجية، المفاهيم الهندسية).

– **فرضيات البحث:** وتضمنت الفرضيات الآتية عند مستوى الدلالة (0.01):

- يوجد فرق دال إحصائياً بين متوسطي درجات تلاميذ المجموعة التجريبية والمجموعة الضابطة في التطبيق البعدي لاختبار المفاهيم التوبولوجية.
- يوجد فرق دال إحصائياً بين متوسطي درجات تلاميذ المجموعة التجريبية والمجموعة الضابطة في التطبيق البعدي لاختبار المفاهيم الهندسية.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

- حدودُ البحث: تحدّد البحث بالآتي:

- حدود بشرية: عينة من تلاميذ الصفّ الأول الأساسي.

- حدود مكانية: منطقة ضاحية قدسيا، المدرسة الرابعة- حلقة أولى.

- حدود زمنية: الفصل الدراسي الأول للعام: (2022-2023م).

- حدود الموضوع: تعرّف أثر استخدام التلمذة المعرفية في تنمية المفاهيم التوبولوجية والمفاهيم الهندسية لدى عينة من تلاميذ الصفّ الأول الأساسي.

- مصطلحات البحث وتعريفاته الإجرائية:

• التلمذة المعرفية Cognitive Apprenticeship:

نموذج تدريسي يتيح للمتعلم نمذجة المواقف الرياضية وتقديم مواقف ومشكلات مشابهة للتلاميذ لحلها، حيث يمارس المعلم دور الخبير وي طرح التساؤلات التي تشجع التلميذ على التأمل والتعبير، مع تقديم الدعم المطلوب الذي يمكن التلميذ من حل المشكلات الرياضية قبل أن يبدأ دوره في التلاشي تدريجياً (Rucker et al., 2021).

• المفاهيم التوبولوجية Topological Concepts:

هي تلك المفاهيم التي تعبر عن الحقائق والمعلومات التي تكوّن مجموعة من العلاقات الفراغية، ويمكن معها استخدام أدوات متنوعة من الأشياء التي يدركها الطفل من خلال خبراته وتفاعله مع البيئة حيث الشكل واللون والحجم لتعرف تلك المفاهيم، والتي تمثل مفهوم الإحاطة والاستمرارية والترتيب والعدد والأشكال الهندسية (زغلول، 2022، 31).

وتعرّف إجرائياً في البحث الحالي بأنها: مجموعة من المفاهيم التوبولوجية المتعلقة بالانفصال والجوار والإحاطة والعلاقات المكانية الخاصة بالطفل في الصف الأول الأساسي، والتي سنقاس وفق اختبار المفاهيم التوبولوجية المعدّ في هذا البحث.

• المفاهيم الهندسية: Geometric Concepts:

"مجموعة من الأشياء المدركة بالحواس أو الأحداث التي يمكن تصنيفها مع بعضها البعض على أساس من الخصائص المشتركة والمميزة، ويمكن أن يُشار إليها باسم أو رمز" (الحرياي، 2011، 398).



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

وتعرّف إجرائياً في البحث الحالي بأنها: مجموعة من المفاهيم التوبولوجية المتعلقة المجسّمات والأشكال الهندسية والتطابق، الخاصة بالطفل في الصف الأول الأساسي، والتي ستُفاسد وفق اختيار المفاهيم الهندسية المعدّ في هذا البحث.

• تلاميذ الصفّ الأوّل الأساسي: **Second Grade Students**:

هم مجموعة الأطفال من ذوي المرحلة العمرية (6-7) أعوام ويدرسون الصفّ الأوّل الأساسي في مدارس الحلقة الأولى من التعليم الأساسي.

- الجانب النظري للبحث: وتضمّن الآتي:

1- أهمية الرياضيات وتدريسها:

تعدّ الرياضيات من أهم أسس المعرفة وعنصر رئيس في تطور مختلف العلوم والمجتمع، لذا فإنّ الغاية من تعليم الرياضيات التأسيس عليها لتعلمها مستقبلاً، بشكل يكون له علاقة وثيقة بمهارات التفكير، فالرياضيات تحتوي ترتيب الأفكار والمعلومات وتنظيمها والاكتشاف والابتكار والتجريد والتعميم، والقدرة على مواجهة المشكلات واختيار الحلول المناسبة لهذه المشكلات.

2- أهمية دراسة التوبولوجيا والهندسة:

تتيح لنا استكشاف مجموعة من البيانات المعقدة في مجموعة متنوعة من الموضوعات في العلوم الاجتماعية وعلم الأحياء وعلم الفلك وغيرها الكثير (Otter et al, 2017) والمساعدة على فهم العالم المحيط مثل النظام الشمسي ومجموعة الكواكب، وإحصاء أعداد الأجزاء والفجوات في مجموعة بيانات مواقع النجوم (Cisewski-Kehe et al, 2018) أو حتى لفحص أنماط العروق في أوراق النبات وبصمات الأصابع في الإنسان، ودراسة تركيب الفطريات والأوعية الدموية وغيرها من الأشياء ذات الفروع والعقد. بالإضافة إلى وصف أنماط الأنشطة التي يؤديها البشر والحيوانات. على سبيل المثال، أنماط التصويت الجيوغرافي في مناطق مختلفة (Feng and Porter, 2020). أما الهندسة فهي أحد الفروع الأساسية للرياضيات التي تدرس القياس والمساحات وتشكيل الأشياء من وجهة نظر هيكلية. يتم دراسة الهندسة بشكل عام في جزأين: الهندسة المستوية (ثنائية الأبعاد) وهي الهندسة المستوية هي فرع من فروع الهندسة التي تدرس الأشكال وأبعادها على مستوى واحد. في الهندسة المستوية، يتم دراسة الأشكال المضلعة مثل المثلثات والمربعات والخماسيات وما إلى ذلك بالإضافة إلى الأشكال الدائرية. والهندسة الفراغية (ثلاثية الأبعاد) التي تدرس الهندسة الفراغية الأشكال ثلاثية الأبعاد. في هذا الفرع من الهندسة، تتم دراسة الأشكال المخروطة و الكروية و المكعبة و المثلثة وما إلى ذلك، وتأتي أهمية الهندسة على سبيل المثال، عند



**المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية**

تصميم مبنى، يجب فحص القياسات المختلفة للتأكد من دقة التصميم والبناء. وأيضاً، في تصميم الأجزاء الميكانيكية، تعتبر القياسات الدقيقة مهمة جداً بحيث يتم دمج الأجزاء بشكل صحيح والحصول على الأداء الأمثل. علاوة على ذلك فإن القياسات الهندسية مفيدة جداً في الحياة اليومية. على سبيل المثال، عند شراء الأشياء، يجب فحص الأحجام المختلفة للتأكد من صحة الشراء (غزال، 2023).

والهندسة من أهم فروع الرياضيات ويعانى التلاميذ من صعوبات في الهندسة منها التعامل مع الأشكال والمجسمات الهندسية في استخدام الأدوات الهندسية بشكل سليم والتعرف على أنواع الزوايا وكذلك عدم قدرتهم على التمييز بين الأشكال والمجسمات الهندسية وعدم التمييز بين محيط الشكل ومساحته (إبراهيم، 2009، 150). كما تتميز الهندسة عن باقي فروع الرياضيات في أنها تتصف بطبيعة بصرية مما يسهل على المتعلم فهمها وتخليها، على عكس الجبر والعد والتفاضل وغيرها، وهي من الفروع التي صارت مرتبطة بتطور الإنسان ف من الضروري البحث عن استراتيجية جديدة لتسهيل فهم الهندسة مثل استراتيجية التلمذة المعرفية.

3- خطوات التدريس وفق التلمذة المعرفية:

يمكن تلخيص تلك الخطوات وفق ما ذكره (Napari, 2020, 6-7) كما يلي:

- التلمذة (Modeling):

وهي الخطوة الأولى التي يبدأ المدرب بعرض العمليات والاستراتيجيات ونمذجة المهام لشرح سبب حدوث ظاهرة معينة وتسمية المواد المستخدمة في العمل وسبب اختيارها لها لان مهمات حل المشكلة في التلمذة المعرفية يتم تقديمها عقلياً لذا يتم تقديم توضيح مفصل لخطوات حل مشكلة ما وتنفيذ المهمة أمامهم وعلى المتدربين ملاحظة التطبيق العملي لهذا الأداء، حيث إن إعطاء الطلبة نموذجاً يعد عاملاً مهماً في نجاح التلمذة في أثناء تعليم مهارات معقدة وذلك لأن النموذج يز المتدربين بالمنظم المتقدم في محاولاتهم الأولية لتنفيذ مهارة معقدة وبالتالي يسمح لهم بالتركيز على التنفيذ.

- التسقيط (Scaffolding):

يقوم المعلم بطرح مجموعة من الأسئلة على الطلبة لتتم الإجابة عنها ويقوم المدرب بتقديم المساعدة عند الحاجة وتكون (مساعدة وقتية) بقصد اكساب المتدربين مهارات وقدرات تمكنهم من انجاز المهام بشكل منفرد وسميت بهذا الاسم لأن الدعم يكون فيه مؤقتاً.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

- التدريب (Coaching):

يقوم المدرب أو المعلم بمراقبة الطلبة في تنفيذ المهام التعليمية لمنعمهم من الابتعاد والخروج عن المهمة ودعمهم عند الحاجة مع تدوين ملاحظاتهم وتقييم الحالة المعرفية.

- التأمل (Reflection):

هذه المرحلة يتم فيها تأمل الخطوات التي اتبعها المعلم لتنفيذ المهام التعليمية وتحليل الأداء في ضوء نمذجة العمليات ومراجعة الجهود المبذولة للإنجاز.

- التعبير (Articulation): يبدأ الطلبة بعرض نتائج المعرفة بشكل شفهي أو كتابة يدوية عن طريق المناقشة أو التوضيح.

- الاستكشاف (Exploration):

يتم التوصل إلى الإجابات الصحيحة من خلال تحفيز الطلبة لوضع الفرضيات لاختبارها وإيجاد أفكار ووجهات نظر مختلفة واختيار الأجوبة الصحيحة وصولاً إلى القاعدة النهائية التي اكتشفها الطلاب.

- إجراءات الدراسة: سارت الدراسة الميدانية للبحث وفق الخطوات الآتية:

1- تحديد منهج البحث المعتمد:

استخدمت الباحثة منهج البحث شبه التجريبي نظراً لمناسبته لطبيعة البحث وأهدافه، وذلك من خلال استخدام التصميم ذي المجموعتين التجريبية والضابطة والتطبيق القبلي والبعدي.

2- المجتمع الأصلي وعينة البحث:

يتكوّن المجتمع الأصلي للبحث من جميع تلاميذ الصف الأول الأساسي في مدارس الحلقة الأولى من التعليم الأساسي في محافظة ريف دمشق، وقد اختارت الباحثة مجموعة البحث بطريقة العينة القصدية، من تلاميذ الصف الأول من مدرسة ضاحية قدسيا الرابعة للحلقة الأولى، حيث ضُمَّت المجموعة التجريبية (37) تلميذاً وتلميذة وهي تعلّم وفق التلمذة المعرفية، و(36) تلميذاً وتلميذة للمجموعة الضابطة تعلّم وفق الطرائق المعتادة.

3- إعداد الأدوات (اختباري المفاهيم):



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

أولاً- اختيار الدروس: اختيرت ثلاثة دروس ضمن الفصل السابع والأخير من الكتاب ، وهي: (المجسّمات، الأشكال الهندسيّة، التّطابق)، بمقرر كتاب الرياضيات للصف الأوّل الأساسي.

ثانياً- تحليل محتوى الدروس:

وهو سلوك يهدف إلى وصف المحتوى وصفاً موضوعياً ومنهجياً وكمياً، وللتأكد من صدق تحليل عُرضت نتائج التحليل في صورة استبانة على مجموعة من المتخصصين في مجال تعليم الرياضيات. وأجرت الباحث بعض التعديلات التي أشار إليها المحكمون وتم التوصل في التحليل إلى (15) مفهوم، (12) تعميم، (15) مهارة، ثم حُسب معامل الثبات باستخدام معامل سكوت، وبلغ (0,91) مما يشير إلى أن التحليل ذو ثبات جيد.

ثالثاً- إعداد اختبار المفاهيم التّوبولوجيّة:

من خلال تحليل المحتوى السابق تم بناء اختبار المفاهيم التّوبولوجيّة للصفّ الأوّل الأساسي، إذ شملت الأسئلة أربعة مفاهيم هي: (الجوار، الانفصال، الإحاطة، والعلاقات المكانية) وتكوّن بصورته النهائية من (10) أسئلة، وذلك وفق الخطوات الآتية:

- **تحديد الهدف من اختبار المفاهيم:** يهدف الاختبار إلى قياس مدى امتلاك تلاميذ الصفّ الأوّل الأساسي للمفاهيم التّوبولوجيّة.

-**تحديد المفاهيم التّوبولوجيّة التي يقيسها الاختبار:** إذ تم تحديد المفاهيم التي يقيسها الاختبار وهي (الجوار، الانفصال، الإحاطة، والعلاقات المكانية).

- **إعداد الصورة الأوليّة للاختبار:** أعدت الباحثة عدداً من الأسئلة التي وعرضتها على بعض المحكمين لإبداء الرأي حول هذه النقاط وتم التعديل في ضوء آرائهم.

- **تحديد تعليمات الاختبار:** وذلك على الصفحة الأولى منه، وشرحها شفهاً للتلاميذ.

- **صدق الاختبار:** أي قدرته على قياس ما وضع لقياسه، وذلك من خلال صدق المحكّمين، والصدق التمييزي، وحساب قيمة اختبار (ت) لدلالة الفروق بين متوسطي المجموعتين. ووجد أنها تساوي (7,61) عند مستوى (0,01)



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

وهي أكبر من القيمة الجدولية مما يشير إلى وجود فرق دال إحصائياً بين متوسطي درجات المجموعتين العليا والدنيا، وهذا يعني أن الاختبار له القدرة على التمييز بين المجموعتين العليا والدنيا، مما يدل على صدق الاختبار.

- **التجريب الاستطلاعي للاختبار:** تم تطبيق الاختبار على عينة استطلاعية صغيرة بلغ عددها (11) تلميذاً وتلميذة، ولحساب الثبات، حيث بلغ معامل ألفا كرونباخ (0.86).

- **تحديد زمن الاختبار:** حيث حدد متوسط زمن الاختبار بـ (40) دقيقة.

- **طريقة تصحيح الاختبار:** حيث إن الدرجة الكلية هي حاصل جمع درجات أسئلة المفاهيم ولكل منها درجة واحدة.

رابعاً- إعداد اختبار المفاهيم الهندسية:

من خلال تحليل المحتوى السابق تم بناء اختبار المفاهيم الهندسية للصف الأول الأساسي، إذ شملت الأسئلة محتوى ثلاثة دروس ومفاهيم رئيسية (المجسّمات، الأشكال الهندسية، التطابق) وتكون بصورته النهائية من (11) سؤالاً، وذلك وفق الخطوات الآتية:

- **تحديد الهدف من اختبار المفاهيم الهندسية:** يهدف الاختبار إلى قياس مدى امتلاك تلاميذ الصف الأول الأساسي للمفاهيم الهندسية.

- **تحديد المفاهيم الهندسية التي يقيسها الاختبار:** إذ تم تحديد المفاهيم التي يقيسها الاختبار وهي: المجسّم ويتضمن: (الأسطوانة، المخروط، الكرة، المكعب)، والشكل الهندسي ويتضمن: (مستطيل، مثلث، دائرة، مربع)، والتطابق ويتضمن: (شكلاً مختلفان، نفس الشكلين وقياس مختلف، نفس الشكل ونفس القياس).

- **إعداد الصورة الأولية للاختبار:** أعدت الباحثة عدداً من الأسئلة التي عرضتها على بعض المحكمين لإبداء الرأي حول هذه النقاط وتم التعديل في ضوء آرائهم.

- **تحديد تعليمات الاختبار:** وذلك على الصفحة الأولى منه، وشرحها شفهاً للتلاميذ.

- **صدق الاختبار:** أي قدرته على قياس ما وضع لقياسه، وذلك من خلال صدق المحكمين، والصدق الذاتي من خلال الجذر التربيعي لمعامل الثبات.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

- التجريب الاستطلاعي للاختبار: تم تطبيق الاختبار على العينة الاستطلاعية السابقة، ولحساب الثبات، حيث بلغ معامل ألفا كرونباخ (0.82).

- تحديد زمن الاختبار: حيث حدد متوسط زمن الاختبار أيضاً بـ (40) دقيقة.

- طريقة تصحيح الاختبار: حيث إن الدرجة الكلية هي حاصل جمع درجات أسئلة المفاهيم ولكل منها درجة واحدة.

خامساً- إعداد دليل المعلم:

أعدت الباحثة دليل المعلم لتنفيذ الدروس وفق استخدام التلمذة المعرفية، واشتمل الدليل في صورته الأولية على: مقدمة، والأهداف، والأهمية، وخطوات تنفيذ استراتيجية التلمذة المعرفية، والوسائل والأنشطة والخطة الزمنية وأساليب التقويم.

سادساً- ضبط المتغيرات:

تم ضبط بعض المتغيرات التي يمكن أن تؤثر على نتائج تطبيق البحث، وذلك لضمان تكافؤ المجموعتين، وفيما يلي بغض المتغيرات التي تم ضبطها وهي:

سابعاً- زمن التجريب: تم التزام مجموعتي البحث الضابطة والتجريبية بنفس الجدول الزمني المقرر من وزارة التربية، وبلغ زمن التنفيذ من قبل المعلمة أسبوعان بواقع (6) حصص، وتم اختبار التلاميذ بالاختبارين قبل التنفيذ وبعده، بواقع حصتين.

ثامناً- تنفيذ التجريب:

نُفذت الاستراتيجية على المجموعة التجريبية ثم طُبقت الأدوات تطبيقاً بعدياً على مجموعتي البحث (الضابطة والتجريبية) للمقارنة بين الدرجات التي حصلوا عليها في التطبيقين القبلي والبعدي وذلك من خلال المعالجة الإحصائية من أجل تعرّف أثر استخدام التلمذة المعرفية في تنمية المفاهيم التوبولوجية والهندسية لدى عينة التلاميذ.

- عرض نتائج البحث وتفسيرها: وذلك كما يلي:

أولاً- بالنسبة إلى المفاهيم التوبولوجية (اختبار الفرضية الأولى والإجابة عن السؤال الأول للبحث): ما أثر استخدام التلمذة المعرفية في تنمية المفاهيم التوبولوجية لدى تلاميذ الصف الأول الأساسي؟



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

للإجابة عن السؤال الأول للبحث والذي نصّه: "ما أثر استخدام التلمذة المعرفيّة في تنمية المفاهيم التوبولوجيّة لدى تلاميذ الصفّ الأول الأساسي؟" تمّ التوصل إلى معرفة حجم الأثر لاستراتيجية التلمذة المعرفيّة في تنمية المفاهيم التوبولوجيّة. وذلك كما هو موضّح في الجدول الآتي:

الجدول رقم (1) حجم الأثر لدلالة الفروق بين متوسطات درجات تلاميذ المجموعة التجريبية في التطبيق القبلي والبعدي لاختبار المفاهيم التوبولوجيّة

حجم الأثر	D	m ²	قيمة (ت)	درجة الحرية (df)	البيانات البعد
مرتفع	8,53	0,948	27,26	36	الجوار
مرتفع	12,25	0,974	39,15	36	الانفصال
مرتفع	9	0,953	28,67	36	الإحاطة
مرتفع	16,77	0,986	53,96	36	العلاقات المكانية
مرتفع	18,96	0,989	61,42	36	الاختبار ككل

يتّضح من خلال الجدول رقم (1) ووجود فرق ذي دلالة إحصائية عند مستوى (0,01) بين متوسطي درجات المجموعتين الضابطة والتجريبية وأن استراتيجية التلمذة المعرفيّة لها تأثير كبير في تنمية المفاهيم التوبولوجيّة الفرعية والاختبار ككل لدى تلاميذ الصفّ الأول الأساسي، وأن الاستراتيجية تختلف في حجم التأثير على تنمية المفاهيم الفرعية حيث كان لها أكبر حجم للأثر في تنمية المفاهيم الرئيسة والفرعية. إذاً ممّا سبق يمكن القول إنه يوجد تأثير إيجابي لاستخدام استراتيجية التلمذة المعرفيّة في تنمية المفاهيم التوبولوجيّة لدى تلاميذ الصفّ الأول الأساسي. وتفسّر هذه النتيجة بأن التلمذة المعرفيّة تتيح للمتعلم أن يمارس نشاطه بفعالية، فهي تعتمد على المبادئ البنائية، ومن خلال تدريب التلاميذ كانوا قادرين على المشاركة وبناء المعرفة بأنفسهم، واتخاذ القرار، من خلال الاستقصاء وطرح الأسئلة والتفكير العلمي مما حفّزهم على الفهم العميق لتلك المفاهيم. تتفق هذه النتيجة مع نتائج دراسة الجندي (2020) ودراسة عبد الفتاح وصالحه (2024).



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

ثانياً- بالنسبة إلى المفاهيم الهندسيّة (اختبار الفرضية الثانية والإجابة عن السؤال الثاني للبحث): ما أثر استخدام التلمذة المعرفيّة في تنمية المفاهيم الهندسيّة لدى تلاميذ الصفّ الأوّل الأساسي؟

للإجابة عن السؤال الثاني للبحث والذي نصّه: "ما أثر استخدام التلمذة المعرفيّة في تنمية المفاهيم الهندسيّة لدى تلاميذ الصفّ الأوّل الأساسي؟" تم التوصل إلى معرفة حجم الأثر لاستراتيجية التلمذة المعرفيّة في تنمية المفاهيم الهندسيّة. وذلك كما هو موضّح في الجدول الآتي:

الجدول رقم (2) حجم الأثر لدلالة الفروق بين متوسطات درجات تلاميذ المجموعة التجريبية في التطبيق القبلي والبعدي لاختبار المفاهيم الهندسيّة

حجم الأثر	D	m ²	قيمة (ت)	درجة الحرية (df)	المفاهيم
مرتفع	3,33	0,737	10,58	35	المجسّم
مرتفع	3,03	0,696	9,59	35	الشكل الهندسي
مرتفع	3,42	0,746	10,85	35	التطابق
مرتفع	11,78	0,972	37,64	35	الاختبار ككل

بيّض من خلال الجدول رقم (1) ووجود فرق ذي دلالة إحصائية عند مستوى (0,01) بين متوسطي درجات المجموعتين الضابطة والتجريبية وأن استراتيجية التلمذة المعرفيّة لها تأثير كبير في تنمية المفاهيم الهندسيّة الفرعية والاختبار ككلّ لدى تلاميذ الصفّ الأوّل الأساسي، وأن الاستراتيجية تختلف في حجم التأثير على تنمية المفاهيم الفرعية حيث كان لها أكبر حجم للأثر في تنمية مفهومة المجسّم. إذاً ممّا سبق يمكن القول إنه يوجد تأثير إيجابي لاستخدام استراتيجية التلمذة المعرفيّة في تنمية المفاهيم الهندسيّة لدى تلاميذ الصفّ الأوّل الأساسي. وتفسّر هذه النتيجة بأن استراتيجية التلمذة المعرفيّة وفرت بيئة تعلم آمنة ونشطة وجذابة أتاحت للتلاميذ ممارسة الاستنتاج وربط المفاهيم بالتعميمات بروابط واتصالات رياضية جديدة ضمن جو من المناقشات أتاح لهم الفهم العميق لمجموعة الهندسيّة. تتفق هذه النتيجة مع نتائج دراسة الجندي (2020) ودراسة عبد الفتاح وصالحه (2024).

- توصيات البحث ومقترحاته:



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

في ضوء نتائج البحث التي تم التوصل إليها تقدّم الباحثة التّوصيات والمقترحات الآتية:

- ✓ الاهتمام بتنمية التفكير ما وراء المعرفي لدى التلاميذ من خلال تدريس الرياضيات وفق التّلمذة المعرفيّة.
- ✓ تشجيع معلمي الرياضيات علي استخدام استراتيجيات جديدة ومتنوعة في تعليم المفاهيم التوبولوجيّة والهندسيّة.
- ✓ الهندسة تعمل علي تنمية التفكير الإبداعي للطلاب .
- ✓ تدريب المعلمين أثناء الخدمة علي استخدام التّلمذة المعرفيّة.
- ✓ تضمين أدلة الرياضيات استراتيجيّة التّلمذة المعرفيّة.
- ✓ استخدام وسائل تقويم متنوعة تتّمي الإبداع الرياضي، وزيادة التركيز على التقويم التكويني وآليات التقويم البنائي.
- ✓ إجراء دراسة حول علاقة المفاهيم التوبولوجيّة والهندسيّة بالتفكير الإبداعي لدى التلاميذ.
- ✓ إجراء دراسة حول معوقات استخدام التّلمذة المعرفيّة في تعليم الأطفال.

قائمة المراجع:

- إبراهيم، معتز أحمد. (2009). تصميم أنشطة تعليمية تعالج صعوبات التعلم في الرياضيات لدى التلاميذ العاديين بالصفوف الثلاثة الأولى من المرحلة الابتدائية. *مجلة الثقافية والتنمية*، 2 (8):
- الجندي، حسن عوض. (2020). استخدام نموذج التلمذة المعرفية لتنمية حل المسألة الرياضية اللفظية والنزعة الرياضياتية المنتجة لدى تلاميذ المرحلة الابتدائية، *مجلة تربويات الرياضيات*، 23 (7): 82-158، (10.21608/ARMIN.2020.119441).
- الحرزاوي، خولة مصطفى. (2011). تقويم استيعاب معلمي الرياضيات من غير ذوي الاختصاص للمفاهيم الرياضية واتجاهاتهم نحو الرياضيات وطرائق تدريسها. *مجلة جامعة تكريت للعلوم*، 18 (4): 393-423.
- زغلول، عاطف حامد. (2003). فاعلية المحاكاة باستخدام الكمبيوتر في تنمية المفاهيم العلمية لدى الأطفال الفائقين بمرحلة الرياض، *الجمعية المصرية للتربية العلمية، المؤتمر العلمي السابع* "نحو تربية علمية أفضل" ، الإسماعيلية، 27- 30 يوليو.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

- سلامة، عادل أبو العز. (2004). تنمية المفاهيم والمهارات العلمية وطرق تدريسها. عمان: دار الفكر العربي.
- شومان، غادة؛ والشحادات ابراهيم. (2020). استخدام اليدويات في تدريس التوبولوجي وأثرها على تنمية التفكير البصري والاتجاه نحو الرياضيات لتلاميذ المرحلة الابتدائية. مجلة البحث العلمي في التربية. كلية البنات للأداب والعلوم والتربية، جامعة عين شمس، ٢١ (٣)، ١٤٢-٢٠١.
- عبد الفتاح، ابتسام عز الدين؛ وصالحه، رشا نبيل. (2024). فاعلية استراتيجية مقترحة قائمة على نموذجي التلمذة المعرفية وويتلي في تنمية عمق المعرفة الرياضية والفهم العميق في الرياضيات لدى تلاميذ المرحلة الابتدائية، المجلة التربوية لكلية التربية بسوهاج، 119 (1): 829-933.
- العتيبي، ريم طلال؛ والفهد، عبد الله سليمان. (2020). برنامج قائم على التلمذة المعرفية وفاعليته في تنمية مهارات التفكير الجانبي والتواصل الرياضي لدى طالبات الصف الأول الثانوي، رسالة دكتوراه، جامعة الإمام محمد بن سعود الإسلامية، الرياض، السعودية.
- غزال، عبيد. (2023). ما هي الهندسة؟ أهمية الهندسة في الرياضيات والحياة اليومية، أسترجم من: (<https://medium.com/@araabmath>)، أُطلع عليه بتاريخ: 2024-6-17م.
- الفريح، حفصه عبد الله؛ والشلهوب، سمر عبد العزيز. (2022). واقع ممارسة معلمات الرياضيات لمهارات استخدام المحسوسات اليدوية في تدريس الرياضيات للصفوف العليا للمرحلة الابتدائية، مجلة كلية التربية بجامعة أسيوط، 38 (12): 307-346، (DOI: 10.21608/mfes.2022.288637).
- Cisewski-Kehe, J., Wu, M., Fasy, B., Hellwing, W., Lovell, M., Rinaldo, A., et al. 2018. "Investigating the cosmic web with topological data analysis," in *American Astronomical Society Meeting Abstracts #231*. Washington, DC. Available online at: <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2018AAS...23121307C/abstract>.
- Feng, M., and Porter, M. A. 2021. Persistent homology of geospatial data: A case study with voting. *SIAM Rev.* 63:67-99. doi: 10.1137/19M1241519.
- Minshew, L. M., Olsen, A. A., & McLaughlin, J. E. (2021). Cognitive apprenticeship in STEM graduate education: A qualitative review of the literature. *AERA Open*, 7 (1), 1-16.
- Napari, A. (2020). Using cognitive apprenticeship to enhance the study of budgeting and budgetary control: An action research. *The Universal Academic Research Journal*, 2 (1), 1-14.
- Otter, N., Porterm M. A., Tillmann, U., Grindrod, P., and Harrington, H. A. 2017. A roadmap for the computation of persistent homology. *EPJ Data Sci.* 6:17. doi: 10.1140/epjds/s13688-017-0109-5.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

- Rucker, H., Kolpek, J. H., & Cain, J. (2021). Implementing cognitive apprenticeship theory into the design of a doctor of pharmacy course. *Currents in Pharmacy Teaching and Learning*, 13 (7), 835-842.
- Taylor, K. (2021). *Online Professional Development and Teacher Capacity to Incorporate English Language Arts Assignments Based on Levels 3 and 4 of Webb's Depth of Knowledge Framework* (PhD dissertation), School of Graduate and Professional Studies, Trevecca Nazarene University.

Mathematical Logic and its Relationship to Academic Achievement in the Subjects of Topology and Geometric Concepts among Students of the mathematics Departments and a Class Teacher

Dr. Fatema Al-Alyan (Damascus University- Syria)
Dr. Reyad Al-Hamido (Al-Furat University- Syria)

Abstract:

The aim of the research was to identify the relationship between mathematical logic and academic achievement in the subject of topology for students of the mathematics division of the second year, and the subject of geometric concepts for students of the department and the class teacher of the second year, in addition to determining the differences in the degree of their possession of mathematical logic according to the variables of gender (females, males) and university specialization (mathematics, class teacher). The research was limited to a sample of students from the Faculties of Science and Education at Al-Furat University for the academic year (2023-2024 AD), where a purposive sample was selected with a final number of 127) male and female students. In order to achieve the aim of the research, the researchers prepared a mathematical logic test for students, and relied on the grades obtained by students in the topology and geometric concepts exams. After ensuring the validity and reliability of the tools, the students' answers were converted into grades for the purpose of statistical processing using the statistical package (spss) and the use of available statistical means. The results showed that there is a statistically significant relationship between mathematical logic and academic achievement in both the topology subject for mathematics division students and the geometric concepts subject for department students and class teacher, in addition to the absence of statistically significant differences in the degree of their possession of mathematical logic according to the variables of gender (females, males) and university specialization (mathematics, class teacher). In light of this, the researchers developed a set of conclusions, recommendations and proposals that would support the



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

current research and provide prospects for other future studies, the most prominent of which were conducting training programs and courses to develop students' mathematical logic
- **Keywords:** Mathematical Logic, Academic Achievement, Topology, Geometric Concepts.

المنطق الرياضي وعلاقته بالتحصيل الدراسي في التوبولوجيا والمفاهيم الهندسية
لدى طلبة قسمي الرياضيات ومعلم صف

د. فاطمه العليان (جامعة دمشق- سورية) د. رياض الحميدو (جامعة الفرات- سورية)

ملخص البحث:

هدف البحث إلى تعرّف العلاقة بين المنطق الرياضي والتّحصيل الدراسي في مادة التوبولوجيا لطلبة قسم الرياضيات السنة الثانية، ومادة المفاهيم الهندسية لدى طلبة قسم معلم صف السنة الثانية، بالإضافة إلى تحديد الفروق في درجة امتلاكهم للمنطق الرياضي وفق متغيري الجنس (إناث، ذكور) والاختصاص الجامعي (رياضيات، معلم صف). وتحدد البحث بعينة من طلبة كليتي العلوم والتربية في جامعة الفرات للعام الدراسي (2023-2024م)، حيث تم اختيار عينة قصدية بلغ عددها النهائي (127) طالباً وطالبة. ولغرض تحقيق هدف البحث أعد الباحثان اختبار المنطق الرياضي للطلبة، كما اعتمدا الدرجات التي حصل عليها الطلبة في امتحاني التوبولوجيا والمفاهيم الهندسية. وبعد التأكد من صدق وثبات الأدوات، جرى تحويل إجابات الطلبة إلى درجات لغرض معالجتها احصائياً وباستخدام الحقيبة الاحصائية (spss) واستخدام الوسائل الاحصائية المتاحة، إذ تبين من خلال النتائج وجود علاقة ذات دلالة احصائية طردية بين المنطق الرياضي والتّحصيل الدراسي في كل من مادة التوبولوجيا لطلبة قسمة الرياضيات ومادة المفاهيم الهندسية لدى طلبة قسم معلم صف، بالإضافة إلى عدم وجود فروق ذات دلالة احصائية في درجة امتلاكهم للمنطق الرياضي وفق متغيري الجنس (إناث، ذكور) والاختصاص الجامعي (رياضيات، معلم صف). وفي ضوء ذلك وضع الباحثان مجموعة من الاستنتاجات والمقترحات التي من شأنها ان تدعم البحث الحالي وتعطي آفاقاً لدراسات مستقبلية أخرى كان أبرزها إجراء برامج ودورات تدريبية لتنمية المنطق الرياضي لدى الطلبة.

- **الكلمات المفتاحية:** المنطق الرياضي، التّحصيل الدراسي، التوبولوجيا، المفاهيم الهندسية.

- مقّمة:

إنّ المنطق الرياضي هو فرع من الرياضيات يهتم باستخدام الرموز المنطقية أو أدوات الربط المنطقية، ويقصد بها مجموعة من الرموز التي يتم من خلالها ربط الجمل المنطقية بعضها للحصول على جمل منطقية جديدة. إذ يُعرّف المنطق الرياضي بأنه نظرية استنباطية يتعامل مع الجمل الرياضية ويحاول بيان كيفية دمجها معاً للخروج بعبارات رياضية جديدة مكوّنة من العبارات الأولية أو الأساسية. والمقصود بالعبارات الرياضية الأولية هي جملة مفيدة ذات معنى. وقد تستخدم في كتابتها الرموز الرياضية، مثلاً $7 = 5 + 2$ عبارة رياضية أولية، ومن الأمثلة على الرموز المنطقية المستخدمة: النفي ويرمز لها بـ « \neg » و « \rightarrow » والوصل ويقابلها الرمز و الفصل ويرمز لها بـ \vee ، والشرط ويعبر عنها بـ « \Rightarrow » وتقرأ «يقضي»، وثنائي الشرط ويرمز لها بـ « \Leftrightarrow » وتقرأ «تكافئ». "وقد حقق المنطق الرياضي فقرة نوعية متميزة عندما استعملت الطرائق الرياضية في دراسته، ولعل الرياضي الألماني لايبنتز (Leibniz) (1646-1716) هو أول من عرض المنطق على شكل حساب جبري، أما المنطق الرياضي كفرع من الرياضيات فقد ظهر في أواسط القرن التاسع عشر نتيجة لأبحاث الرياضي الإنكليزي جورج بُول (G.Boole) (1815-1864) الذي حاول تقديم أساس جبري للمنطق، مستفيداً من أعمال الرياضي الإنكليزي ديمورغان (De Morgan) (1806-1878) باستخدام الرموز للتعبير عن القضايا والتي لا تقبل سوى قيمتين للحقيقة وهما: "صح" أو "خطأ" ورمز العلاقات التي تربط هذه القضايا برموز خاصة. وحصل بذلك على بنية جبرية



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

حملت اسمه «جبر بُول» أو جبر المنطق (عويرة، 2024). ويرتكز المنطق الرياضي على أربع قواعد أساسية للنسق الرياضي وهي قواعد التكوين التي تقوم بتحديد نوعين من الرموز الأولية التي تتكون منها القضايا وهما الروابط المنطقية الأولية وتتمثل برابطة النفي ورابطة العطف ورابطة الفصلل ورابطة اللزوم ورابطة التكافؤ، والمتغيرات الأولية ويُعزى عنها من خلال الحروف الهجائية. والتعريفات وتُقصد بها أن يتخذ الرمز الجديد نفس ما تعنيه مجموعة رموز سابقة ذات معنى معروف، وتتأتى أهميتها من إيصالها لتكافؤ الصيغ المنطقي، والبيدهيات التي لا تحتاج إلى برهان أو إثبات، ويُشترط بها أن تكون تامة وضرورية ومتوافقة مع بعضها البعض، بالإضافة إلى قواعد التحويل (الاستدلال) وهي المسؤولة عما نقوم به من إجراءات تجاه التعبيرات المنطقية، فيتكون عبارات تم برهانها وأخرى غير مبرهنة، وتعتمد على قاعدتين هما الإبدال والوضع بالوضع، وقواعد الاستنباط الذي يتضمن قاعدة التعويض وقاعدة الإبدال وقاعدة الاستدلال (الجنايني، 2017، 272).

- مشكلة البحث:

تأخذ مواد الرياضيات عموماً مكانة كبيرة لدى الطلبة لا سيما طلب الرياضيات المختصين بها الاختصاص، أو طلبة كليات التربية ممن اختصاصهم معلم صف، كونهم سيدرسونها مستقبلاً، إذ لا يخفى على الرياضياتيين وعل التربويين أهمية التحصيل والإنجاز الدراسي في التوبولوجيا والمفاهيم الهندسية لدى الطلبة الجامعيين، ومن خلال الاطلاع على بعض الدراسات السابقة حول المنطق الرياضي وأهميته تبين أهمية امتلاك الطلبة لمهارات المنطق الرياضي، مثل دراسة كل من الجنايني (2017) وبطرس (2016)، والعلاقة الوثيقة بينهما وذلك وفق ما أثبتته دراسة كل من آدم (2020) وهذال (2022)، في حين أثبتت دراسة هذال ومحمد (2023) اختلاف العلاقة بين المنطق الرياضي والتحصيل الدراسي لوحدة مقترحة وفق اختلاف مستوياتهم التحصيلية. ومن خلال خبرة الباحثان في تدريس طلبة قسمي الرياضيات ومعلم صف، لاحظا ضعف اهتمام الطلبة بمكونات المنطق الرياضي ومهاراته. مما سبق تتحدد مشكلة البحث في الحاجة إلى تعرف مستويات الطلبة في المنطق الرياضي، وتحصيلهم الدراسي في المادتين، ثم تحديد العلاقة بين المنطق الرياضي وعلاقته بالتحصيل الدراسي التوبولوجيا والمفاهيم الهندسية. ومن هنا يبرز السؤال الرئيس للبحث وهو: ما العلاقة بين المنطق الرياضي وعلاقته بالتحصيل الدراسي في مادتي التوبولوجيا والمفاهيم الهندسية لدى طلبة قسمي الرياضيات ومعلم صف؟

- أهمية البحث: تبرز أهمية البحث من خلال الآتي:

- لفت الانتباه إلى أهمية امتلاك الطلبة لمكونات المنطق الرياضي ومهاراته.
- توجيه اهتمام الطلبة الجامعيين إلى خيارات تحسين التحصيل الدراسي الرياضي والهندسي.
- التأسيس لوضع حلول ومقترحات لمشكلة انخفاض تحصيل الطلبة الجامعيين في قسمي الرياضيات ومعلم صف.
- التأسيس لإجراء دراسات ميدانية حول المنطق الرياضي لدى الطلبة الجامعيين.

- أهداف البحث: هدف البحث إلى:

- تعرّف مستوى التحصيل الدراسي في مادة التوبولوجيا لدى طلبة قسم الرياضيات السنة الثانية.
- تعرّف مستوى التحصيل الدراسي في مادة المفاهيم الهندسية لدى طلبة قسم معلم صف السنة الثانية.
- تعرّف درجة المنطق الرياضي لدى طلبة قسمي الرياضيات ومعلم صف السنة الثانية.
- تعرّف العلاقة بين المنطق الرياضي والتحصيل الدراسي لدى طلبة قسم الرياضيات السنة الثانية.
- تعرّف العلاقة بين المنطق الرياضي والتحصيل الدراسي لدى طلبة قسم معلم صف السنة الثانية.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

- تعرّف الفروق بين متوسطات درجات عينة الطلبة على اختبار المنطق الرياضي وفقاً لمتغير الجنس (ذكور، إناث).
- تعرّف الفروق بين متوسطات درجات عينة الطلبة على اختبار المنطق الرياضي وفقاً لمتغير الاختصاص (رياضيات، معلم صف).

– أسئلة البحث: سعى البحث إلى الإجابة عن الأسئلة الآتية:

- ما مستوى التحصيل الدراسي في مادة التوبولوجيا لدى طلبة قسم الرياضيات السنة الثانية؟
- ما مستوى التحصيل الدراسي في مادة المفاهيم الهندسية لدى طلبة قسم معلم صف السنة الثانية؟
- ما درجة المنطق الرياضي لدى طلبة قسمي الرياضيات ومعلم صف السنة الثانية؟
- ما العلاقة بين المنطق الرياضي والتحصيل الدراسي لدى طلبة قسم الرياضيات السنة الثانية؟
- ما العلاقة بين المنطق الرياضي والتحصيل الدراسي لدى طلبة قسم معلم صف السنة الثانية؟
- ما الفروق بين متوسطات درجات عينة الطلبة على اختبار المنطق الرياضي وفقاً لمتغير الجنس (ذكور، إناث)؟
- ما الفروق بين متوسطات درجات عينة الطلبة على اختبار المنطق الرياضي وفقاً لمتغير الاختصاص (رياضيات، معلم صف)؟

■ متغيرات البحث: وتضمّنت الآتي:

- المتغير الارتباطي المستقل: (المنطق الرياضي).
- المتغيرات الارتباطي التابع: (التحصيل).
- المتغيرات التصنيفية: الاختصاص الجامعي (رياضيات، معلم صف)، الجنس (إناث، ذكور).

– فرضيات البحث: وتضمّنت الفرضيات الآتية عند مستوى الدلالة (0.01):

- توجد علاقة ذات دلالة إحصائية بين المنطق الرياضي والتّحصيل الدراسي في مادتي التوبولوجيا والمفاهيم الهندسية لدى طلبة قسم الرياضيات.
- توجد علاقة ذات دلالة إحصائية بين المنطق الرياضي والتّحصيل الدراسي في مادتي التوبولوجيا والمفاهيم الهندسية لدى طلبة قسم معلم صف.
- يوجد فرق ذو دلالة إحصائية في درجة المنطق الرياضي لدى الطلبة أفراد عينة البحث وفقاً لمتغير الاختصاص الجامعي (رياضيات، معلم صف).
- لا يوجد فرق ذو دلالة إحصائية في درجة المنطق الرياضي لدى الطلبة أفراد عينة البحث وفقاً لمتغير جنس الطلبة (إناث، ذكور).

– حدود البحث: تحدّد البحث بالآتي:

- حدود بشرية: عينة من طلبة قسمي (رياضيات، معلم صف) في كليتي العلوم والتربية.

- حدود مكانية: جامعة الفرات: كليتي العلوم والتربية في دير الزور والحسكة والرقعة.

- حدود زمنية: الفصل الدراسي الأوّل للعام: (2023-2024م).



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي للمدة 4 - 5 اب 2024 دمشق - سورية

- حدود الموضوع: تعرّف العلاقة المحتملة بين المنطق الرياضي والتّحصيل في مادتي التوبولوجيا والمفاهيم الهندسية لدى طلبة قسمي الرياضيات ومعلم صف وقياس الفروق وفق متغيري الاختصاص الجامعي (رياضيات، معلم صف)، الجنس (إناث، ذكور).

- مصطلحات البحث وتعريفاته الإجرائية:

• **المنطق الرياضي:** هو علم قواعد الاستدلال والاستنتاج وتحليل المشكلات استناداً إلى مهارات التفكير الاستدلالي إضافة إلى اشتقاق العلاقات وتقديم البراهين (ادم، 2013، 76).

ويعرّف إجرائياً في البحث الحالي بأنه: نشاط عقلي مرن ومنظم يهدف إلى حل المشكلات الرياضية باستخدام بعض أو أحد المكونات الآتية: الاستقراء، والاستنتاج والاستدلال والتعبير بالرموز، وإدراك العلاقات، والبرهان الرياضي حسب طبيعة كل مشكلة ويقاس بالدرجة التي حصل عليها الطالب في اختبار المنطق الرياضي المعدّ في البحث.

• **التّحصيل الدراسي:**

مجموعة من الخبرات والمهارات المعرفية يمتلكها المتعلم فيحفظها ويستوعبها ويسترجمها عند الضرورة، باستخدام بعض المهارات العقلية كالفهم والانتباه والتكرار موزعة على فترات زمنية معينة (هزال، 2022، 379).

- الجانب النظري للبحث: ويتضمن الآتي:

أولاً- مفهوم المنطق الرياضي وأهميته:

إنّ المنطق الرياضي هو ذلك النمط من أنماط التفكير، الذي يقوم به المتعلم عندما يتعرض لموقف رياضي، يتمثل في الاستقراء، والاستنتاج، والتعبير بالرموز، والبرهان، والتفكير المنطقي، والتخمين، والنمذجة، والتعليل والسببية، والنقد، والتنقيح (الخطيب وعبانة، 2011، 192). وهو مصطلح له معاني متعددة وتم تناوله من عدة اتجاهات وعرف بأنه "أحد أنماط التفكير المعتمدة على الاستنتاج للأفكار الرياضية لحل المشكلات ويتطلب استراتيجيات متنوعة لحل المسائل الرياضية بأكثر من طريقة، ومن استراتيجياته: الحدس والعمل بشكل نظامي، وتقديم المتغيرات والتعميم، والبحث عن أمثلة محددة للتوضيح، والعمل بطريقه عكسية، وتمثيل المعلومات من خلال الأشكال والجدول، وفحص واختيار الأشكال (Guy, 2012, 60) ويعرف بالتفكير الراقى؛ لأن بيئة تعلم الرياضيات التي تساعد الطلاب على الاكتشاف والاختراع والإبتكار وتحقيق حلول إبداعية غير مألوفة (المفتي، 2007).

ثانياً- نظريات المنطق الرياضي وقواعده:

يشتمل المنطق الرياضي على عدّة نظريات أساسية، وهي نظرية حساب القضايا، وحساب الحلول، ونظرية الفئات ونظرية دالة القضية، دالة ونظرية، ونظرية العلاقات (زيدان، 1989، 213)، ويقوم المنطق الرياضي على ثلاث قواعد أساسية هي:

1- مبدأ «ثانية القيمة»: حيث لا يقبل المنطق الرياضي سوى قيمتين للحقيقة هما «صح» أو «خطأ» لكل القضايا التي يدرسها. ويُعبّر في جبر المنطق عن هاتين القيمتين بالرمزين «1» و «0» على الترتيب.

2- مبدأ «الثالث المُستبعد»: وهو يستبعد حالة الوسط بين الوجود واللاوجود. فإذا كانت ج قضية ما، فإنه إما أن تكون ج صحيحة أو أن يكون فيها ج صحيحاً.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

3- مبدأ «عدم التناقض»: وهو يؤكد استحالة وقوع الحدث ونفيه في آن واحد.

ولابد من الإشارة إلى أن موضوعات المنطق الرياضي ذات أهمية كبرى في الميادين العلمية المختلفة. ولا غنى لمصممي البرامج وللعاملين في مجالات لغات البرمجة والذكاء الصناعي والدارات الكهربائية والدارات المنطقية والدارات التجميعية عن تعرّف مفاهيم المنطق الرياضي ودراستها دراسة معمقة (عويّرة، 2024)

ثالثاً. مكونات المنطق الرياضي ومهاراته:

يمكن تصنيف مهارات المنطق الرياضي على النحو الآتي:

- النّمذجة وتتضمن ذلك (استخدام الجداول، الصور، التمثيلات البيانية، المخططات الهندسية)، الاستدلال، التعبير بالرموز، التحليل المنطقي، الوصول إلى الحل الأفضل. وتقسّم المهارات إلى:

1- مهارات رئيسية (مركبة): وهي الاستقراء، والاستدلال، والتعبير بالرموز والبرهان الرياضي، والتفكير الاحتمالي، والتفكير العلاقي، والتصور البصري المكاني.

2- مهارات ثانوية فرعية: وتضم كل المهارات التي تندرج تحت كل مهارة رئيسية (Al- & Abu Zaydah, 2015, 24). كما أشار (علي، 2009) إلى تلك المهارات كالآتي:

- الاستقراء: ويشتمل على قدرة الطالب على استنتاج أو استخلاص خاصة من عدة حالات.

- الاستنباط: ويتمثل في قدرة الطالب على الوصول لحالات خاصة اعتماداً على مبدأ عام.

- التعبير بالرموز: ويتمثل في قدرة الطالب على استخدام الرموز للتعبير عن المعطيات اللفظية ومن المهارات التي تم تحديدها ضمن مهارات التفكير الرياضي ويسعى البحث الحالي لتنميتها هي الاستقراء والاستنتاج والنّمذجة وإدراك العلاقات والتعبير بالرموز.

- مهارة الاستقراء: عملية عقلية يتم بها استنتاج الحالة العامة من الحالات الخاصة.

- مهارة الاستنتاج: العملية يتقدم فيها العقل من القضايا العامة إلى القضايا الخاصة.

- النّمذجة الرياضية: تحويل المشكلة الحياتية إلى مسألة رياضية ثم التعامل مع هذه المسألة وحلها، واختبار الحل في الموقف الحياتي ومن ثمّ التعميم والتنبؤ واستخدام النماذج والتمثيلات لتوضيح الأفكار وتفسيرها، وحل المشكلات.

- إدراك العلاقات: تستخدم لمعرفة العلاقة بين العلاقات الكامنة بين جزئيات معطاه لحل المسألة، وإيجاد العلاقات بين مفهومين أو فكرتين رياضيتين.

- مهارة التعبير بالرموز: قدرة المتعلم على التعبير عن الأفكار أو المعطيات اللفظية أو المسائل باستخدام الرموز الرياضية، لها علاقة وثيقة بمهارات الترجمة الرياضية التي تضم تحويل الألفاظ أو الأشكال إلى رموز والعكس.

مما سبق تتطلب تلك المهارات والمكونات للمنطق الرياضي تطبيق أنشطة تدريسية أثناء عرض المادة العلمية، تقوم على تمارين وتطبيقات رياضية تعتمد على التفاعل الصفي لتنميتها.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

- إجراءات الدراسة الميدانية للبحث:

أولاً- تحديد منهج البحث: استخدم الباحثان منهج البحث الوصفي التحليلي، وتم إعداد الاختبارات التحصيلية لمادتي التوبولوجيا والمفاهيم الهندسية، واختبار المنطق الرياضي.

ثانياً- المجتمع الأصلي وعينة البحث: يتكون المجتمع الأصلي للبحث من جميع طلبة كليتي العلوم والتربية في جامعة الفرات في قسمي الرياضيات ومعلم صف، وتم تحديد عينة مقصودة من طلبة السنة الثالثة في قسم الرياضيات بلغ عددهم (54) و طلبة السنة الثانية في قسم معلم صف بلغ عددهم (67)، وذلك في كل من كليات دير الزور والحسكة والرقعة، وبذلك تكونت العينة بصورتها النهائية من (127) طالباً وطالبة، يبين الجدول الآتي توزيعها وفق المتغيرات:

الجدول (1): عدد الطلبة عينة البحث

العدد	المتغير
54	طلبة اختصاص قسم الرياضيات
67	طلبة اختصاص قسم معلم صف
95	الجنس (إناث)
37	الجنس (ذكور)
127	المجموع

ثالثاً- أدوات البحث: تم استخدام الأدوات الآتية:

1- اختبار المنطق الرياضي: تهدف تمارين اختبارات المنطق الرياضي لتدريب العقل على عدد من العبارات والمسائل المنطقية، والمواضيع البديهية؛ ولكنها تكون مبهمة ومحيرة، وبالتالي يجب أن أن يمتلك الطالب الدافع والحافز لإيجاد الحل وبسرعة، ولقد توصل الباحثان للصورة النهائية لاختبار المنطق الرياضي للطلبة من خلال القيام بالخطوات الآتية:

المرحلة الأولى- التخطيط للاختبار وإعداده من خلال:

أ- تحديد هدف اختبار المنطق الرياضي: حدد الباحثان الهدف من اختبار المنطق الرياضي وهو تعرف مستويات الطلبة في درجة المنطق الرياضي لديهم.

ب- وضع جدول مواصفات للاختبار: قام الباحثان بإعداد جدول مواصفات لاختبار المنطق الرياضي وذلك كما هو موضح في الجدول الآتي:

الجدول (2): مواصفات اختبار المنطق الرياضي



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

المجموع	إدراك العلاقات	التعبير بالرموز	الاستنتاج	الاستقراء	المهارات (المكونات)
			4	3	
		5			
	3				
15					

ت- تحديد نوع الاختبار وصياغة أسئلته: بعد تحديد الهدف من الاختبار، وتحديد المكونات المراد قياسها من خلال الاختبار، قام الباحثان باختبار أسئلة الاختبار بحيث تشمل الاختبار من متعدد، وتم تحديد (15) سؤال موزعة على مكونات المنطق الرياضي، وعرض الاختبار على مجموعة من المتخصصين، وذلك لتحديد مدى ملاءمة العبارات لقياس وسلامته العلمية وصياغته اللغوية.

ث- صياغة أسئلة الاختبار: لقد روعت الاعتبارات التالية عند صياغة مفردات الاختبار أن:

- يوجد إجابة واحدة صحيحة لكل مفردة.
- سليمة من الناحية اللغوية والعلمية.
- محددة وواضحة وخالية من الغموض.
- ممثلة للأهداف التعليمية ومناسبة لمكونات المنطق الرياضي.
- مناسبة لمستوى الطلبة.

ج- صياغة تعليمات الاختبار: تضمن الاختبار مجموعة من التعليمات ليهتدى بها الطالب للإجابة على مفردات الاختبار، ولقد روعت فيها ما يلي:

- استخدام لغة سهلة وواضحة.
- تحديد بيانات الطالب.
- الهدف من الاختبار.
- صاغت بشكل واضح ومحدد.
- التنوع في الأسئلة بحيث تشمل أبعاد الاختبار.
- حدّد الباحثان زمن الاختبار (50 دقيقة).



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

ح- إعداد مفتاح لتصحيح الاختبار: تم إعداد مفتاح لتصحيح اختبار المنطق الرياضي؛ للمساعدة عند تصحيح الاختبار، ولضمان موضوعية التصحيح وعدم اختلاف تقدير الدرجات من مصحح لأخر بحيث تأخذ الإجابة الصحيحة درجة واحدة لكل عبارة، وفي حالة الإجابة الخاطئة تكون الدرجة صفر وعند التحليل يجب الأخذ في الاعتبار الأسئلة المتروكة.

المرحلة الثانية- ضبط الاختبار:

أ - صدق الاختبار: للتأكد من صدق الاختبار تم عرضه مع جدول المواصفات على مجموعة من المحكمين المتخصصين في مجال تدريس الرياضيات، للتأكد من مناسبة الاختبار لقياس مهارات الاستقراء والاستنتاج وإدراك العلاقات والتعبير بالرموز، وما يروونه لازماً وضرورياً من تعديلات أو مقترحات.

ب- حساب زمن الاختبار ومعامل ثبات الاختبار: اعتمد الباحثان في تحديد زمن الاختبار على حساب متوسط الزمن الذي استغرقه أول وآخر طالب للإجابة على أسئلة الاختبار، وجد أن الزمن المناسب للاختبار هو (50) دقيقة .

2- ثبات الاختبار: استخدم الباحثان في إيجاد ثبات اختبار المنطق الرياضي طريقة ألفا كرونباخ باستخدام برنامج (SPSS) ودلت النتائج على أن معامل الثبات ككل (0.83)، مما يدل على ثبات الاختبار وصلاحيته للتطبيق.

2- اختبائي التحصيل الدراسي في مادتي التوبولوجيا والمفاهيم الهندسية:

تم الاعتماد على نتائج اختبائي التحصيل الدراسي في مادتي التوبولوجيا والمفاهيم الهندسية والذين تقدموا لها الفصل الأول للعام الدراسي: (2023-2024م).

رابعاً: اختيار مجموعة البحث وتحديد المتغيرات وضبطها:

تم تطبيق اختبار المنطق الرياضي من خلال توجيهه لأفراد عينة البحث من الطلبة وذلك بتاريخ من (21 إلى 29-2024م).

خامساً- الأساليب الإحصائية المستخدمة لمعالجة البيانات: تم استخدام معامل ارتباط بيرسون لحساب قيمة معامل ثبات الاختبار، والاختبار التائي للمقارنة بين متوسطات درجات الطلبة عينة البحث والوسط الفرضي والانحرافات المعيارية.

- عرض نتائج البحث وتفسيرها: تضمنت نتائج البحث الآتي:
أولاً- عرض النتائج:

1- نتائج الإجابة عن السؤال الأول:

(تعرف مستوى التحصيل الدراسي في مادة التوبولوجيا لدى طلبة قسم الرياضيات) تم حساب الوسط الحسابي (معدل الطالب الدراسي) في امتحان المادة في الفصل الأول والمقارنة بين المتوسط الحسابي لدرجات الطلبة عينة البحث والمتوسط الفرضي والجدول (3) الآتي يوضح ذلك:



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

الجدول (3) معنوية الفرق بين متوسط درجات الطلبة في التحصيل الدراسي والمتوسط الفرضي

عدد العينة	المتوسط الحسابي	المتوسط الفرضي	الانحراف المعياري	ت المحسوبة	ت الجدولية	الدلالة الاحصائية
54	21.6	29	13.59	5.157	1.91	دالة إحصائياً

باستخدام الاختبار التائي لعينة واحدة نلاحظ ان قيمة ت المحسوبة والبالغة (5.157) هي أعلى من قيمة ت الجدولية والبالغة (1.91) وذلك لصالح المتوسط الفرضي المحسوب، وبالتالي انخفاض مستوى التحصيل الدراسي للطلبة (عينة البحث) في التوبولوجيا.

2- نتائج الإجابة عن السؤال الثاني:

(تعرف مستوى التحصيل الدراسي في مادة المفاهيم الهندسية لدى طلبة قسم معلم صف) تم حساب الوسط الحسابي (معدل الطالب الدراسي) في امتحان الفصل الأول والمقارنة بين المتوسط الحسابي لدرجات الطلبة عينة البحث والمتوسط الفرضي، ويوضح الجدول (4) ذلك:

الجدول (4) معنوية الفرق بين متوسط درجات الطلبة في التحصيل الدراسي والمتوسط الفرضي

عدد العينة	المتوسط الحسابي	المتوسط الفرضي	الانحراف المعياري	ت المحسوبة	ت الجدولية	الدلالة الاحصائية
67	20.4	27	11.46	5.177	1.95	دالة إحصائياً

باستخدام الاختبار التائي لعينة واحدة نلاحظ ان قيمة ت المحسوبة والبالغة (5.177) هي أعلى من قيمة ت الجدولية والبالغة (1.95) وذلك لصالح المتوسط الفرضي وهذا يدل على انخفاض مستوى التحصيل الدراسي للطلبة (عينة البحث) في المفاهيم الهندسية.

3- نتائج الإجابة عن السؤال الثالث للبحث:

(تعرف درجة المنطق الرياضي لدى طلبة قسمي الرياضيات ومعلم صف) تم حساب الوسط الحسابي لإجابات الطلبة على الاختبار كما هو موضح في الجدول (5) الآتي:

الجدول (5) معنوية الفرق بين متوسط الدرجات على اختبار المنطق الرياضي والمتوسط الفرضي

عدد العينة	المتوسط الحسابي	المتوسط الفرضي	الانحراف المعياري	ت المحسوبة	ت الجدولية	الدلالة الاحصائية
127	41.3	50	14.59	2.220	1.98	دالة إحصائياً

ينبني من الجدول السابق أن قيمة ت المحسوبة بلغت (2.220) أعلى من قيمة ت الجدولية والبالغة (1.98) ولصالح المتوسط الفرضي. وهذا يدل على انخفاض مستوى المنطق الرياضي لدى الطلبة (عينة البحث).

4- نتائج الإجابة عن السؤال الرابع:



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

(تعرف العلاقة بين المنطق الرياضي والتحصيل الدراسي لدى طلبة قسم الرياضيات):

تم استخدام معامل ارتباط بيرسون بين درجات الطلبة في الاختبارين، وجاءت النتائج كما هو موضح في الجدول رقم (6):

الجدول (6) نتائج اختبار معاملات ارتباط العلاقة بين المنطق الرياضي والتحصيل الدراسي لدى الطلبة

التحصيل الدراسي	العينة الكلية (ن=54)
المنطق الرياضي	
الاستقراء والاستنتاج	**0.58
التعبير عن الرموز	**0.50
إدراك العلاقات	** 0.61
الدرجة الكلية	** 0.56

** دال عند مستوى 0.01

يتضح من الجدول (6) السابق أن جميع معاملات الارتباط هي دالة إحصائياً وموجبة عند مستوى (0.01)، بين درجات الطلبة في اختبائي المنطق الرياضي والتحصيل الدراسي وذلك في كل محور (0.58) (0.61)، والدرجة الكلية (0.56). إذا تُرفض الفرضية الصفرية، وتُقبل الفرضية البديلة، أي أنه توجد علاقة ارتباطية ذات دلالة إحصائية بين درجات الطلبة على اختبار المنطق الرياضي ودرجاتهم في امتحان التحصيل الدراسي على الدرجة الكلية. أي أنه كلما انخفض مستوى المنطق الرياضي لدى الطلبة، انخفض التحصيل الدراسي لديهم، والعكس صحيح.

1- نتائج الإجابة عن السؤال الخامس:

(تعرف العلاقة بين المنطق الرياضي والتحصيل الدراسي لدى طلبة قسم معلم صف):

تم استخدام معامل ارتباط بيرسون بين درجات الطلبة في الاختبارين، وجاءت النتائج كما هو موضح في الجدول رقم (7):

الجدول (7) نتائج اختبار معاملات ارتباط العلاقة بين المنطق الرياضي والتحصيل الدراسي لدى الطلبة



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

التحصيل الدراسي	العينة الكلية (ن=67)
المنطق الرياضي	
الاستقراء والاستنتاج	**0.56
التعبير عن الرموز	**0.51
إدراك العلاقات	** 0.62
الدرجة الكلية	** 0.56

** دال عند مستوى 0,01

يتضح من الجدول (7) السابق أن جميع معاملات الارتباط هي دالة إحصائياً وموجبة عند مستوى (0,01)، بين درجات الطلبة في اختباري المنطق الرياضي والتحصيل الدراسي وذلك في كل وعلى الدرجة الكلية. إذا تُرفض الفرضية الصفرية، وتقبل البديلة، أي أنه توجد علاقة ارتباطية ذات دلالة إحصائية بين درجات الطلبة المنطق الرياضي والتحصيل الدراسي على الدرجة الكلية. أي أنه كلما انخفض مستوى المنطق الرياضي لدى الطلبة، انخفض التحصيل الدراسي لديهم، والعكس صحيح.

2- نتائج الإجابة عن السؤال السادس:

(تعرف الفروق بين متوسطات درجات عينة الطلبة على اختبار المنطق الرياضي وفقاً لمتغير الجنس (ذكور، إناث):

استخدم الباحثان أيضاً اختبار "ت" للكشف عن دلالة واتجاه الفروق بين متوسطات درجات الذكور والإناث على الاختبار. وجاءت النتائج كما هو موضح في الجدول رقم (8):

الجدول (8): الفروق بين متوسطات درجات الطلبة (ذكور، إناث) في اختبار المنطق الرياضي

المتغير	إناث ن=95		ذكور ن=37		د. ح	قيمة "ت"	مستوي الدلالة
	المتوسط	الانحراف	المتوسط	الانحراف			
الدرجة الكلية	18.70	10.35	17.76	11.10	125	1.642	غير دالة

يتضح من خلال الجدول السابق عدم وجود فروق دالة إحصائية بين متوسطات درجات الطلبة الذكور والإناث في الدرجة الكلية لاختبار المنطق الرياضي.

3- نتائج الإجابة عن السؤال السابع:



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

(تعرف الفروق بين متوسطات درجات عينة الطلبة على اختبار المنطق الرياضي وفقاً لمتغير الاختصاص (رياضيات، معلم صف):

للتحقق من صحة هذا الفرضية أيضاً، استخدم الباحثان اختبار "ت" للكشف عن دلالة واتجاه الفروق بين متوسطات درجات الذكور والإناث على اختبار المنطق الرياضي. وجاءت النتائج كما هو موضح في الجدول الآتي رقم (9):

الجدول (9): الفروق بين متوسطات درجات الطلبة (رياضيات، معلم صف) في اختبار المنطق الرياضي

المتغير	رياضيات ن=54		معلم صف ن=67		د. ح	قيمة "ت"	مستوي الدلالة
	المتوسط	الانحراف	المتوسط	الانحراف			
الدرجة الكلية	26,58	10,11	25,80	11,11	125	1.595	غير دالة

يتضح من خلال الجدول السابق عدم وجود فروق دالة إحصائية بين متوسطات درجات الطلبة من ذوي الاختصاص (رياضيات، معلم صف) على الدرجة الكلية في اختبار المنطق الرياضي.

ثانياً. تفسير النتائج:

مما سبق يمكن القول إن مستوى التحصيل الدراسي للطلبة (عينة البحث- قسم الرياضيات) في التوبولوجية، كان منخفضاً، كما تبين انخفاض مستوى التحصيل الدراسي للطلبة (عينة البحث- قسم معلم صف) في المفاهيم الهندسية، وهذا يدل على تدني مستويات الإنجاز الدراسي لدى الطلبة والذي يمكن تفسيره بصعوبة المنهاجين في كل من الاختصاصين، فالتوبولوجيا تحتاج لمستويات تفكير عالية، وتتطلب عمقاً دراسياً، كما إن طلبة معلم الصف لا يزالون يعانون من صعوبات تحصيلية في مواد الرياضيات ولا سيما المفاهيم الهندسية، وقد يرجع ذلك إلى رهبة الطلبة من هاتين المادتين، أو وجود بعض الصعوبة في مستويات أسئلة الامتحان أو ضيق الوقت المخصص لهم في الدراسة، خاصة أن الأسئلة الامتحانية للمواد في الكليات لا تخضع لشروط الصدق والثبات، وتأخذ المنحى التدريسي والحفظي أكثر من موضوع القياس الفكري لجميع المستويات وتنوعها، كما أوضحت جدول النتائج تدنس مستوى الطلبة عين البحث من قسمي الرياضيات ومعلم صف في مكونات المنطق الرياضي الثلاثة وعلى الدرجة الكلية للاختبار، ويمكن تفسير ذلك بأن الطلبة اعتادوا غالباً على الدراسة الحفظية، وقليلاً ما ينمون مهاراتهم الفكرية والمنطقية الرياضية، ربما يكون ذلك بسبب طبيعة الأنظمة التعليمية القائمة، على الامتحانات النظرية.

وبالنسبة لوجود علاقة بين المنطق الرياضي والتحصيل الدراسي فهذا يؤكد أهمية امتلاك الطلبة لمستويات مرتفعة من المنطق الرياضي، لأنها تنمي لديهم المهارات الرياضية والمهارات العقلية العليا، ولكنها تحتاج إلى ممارسة وتدريب. أما عدم وجود فروق دالة إحصائية بين متوسطات درجات الطلبة الذكور والإناث وفي كلا الاختصاصين (رياضيات، معلم صف) في الدرجة الكلية على اختبار المنطق الرياضي، فهذا يؤكد أن الطلبة على مختلف جنسهم واختصاصهم متشابهون في آلية التعاطي الدراسي مع موادهم الجامعية، وندراً ما يعطون مكونات المنطق الرياضي أهمية في تعلمهم، وأن هؤلاء الطلبة يحتاجون إلى تنمية المنطق الرياضي لديهم وذلك من خلال حل التمارين والقضايا والمسائل المختلفة والتدريب المستمر عليها ومحاولة المتابعة الدائمة.

• **المقترحات والتوصيات:**

بناءً على ما سبق يقدم الباحثان بعض المقترحات والتوصيات الآتية:



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

- ✓ إعداد خطط وآليات لرفع مستويات التحصيل الدراسي لدى الطلبة في التوبولوجيا والهندسة وتنفيذها داخل الجامعة.
- ✓ إجراء برامج ودورات تدريبية لتنمية المنطق الرياضي لدى الطلبة.
- ✓ إجراء دراسة لتحري أسباب ضعف التحصيل الدراسي لدى الطلبة والعوامل المؤثرة فيه.
- ✓ إجراء دراسة لتحري أسباب انخفاض المنطق الرياضي لدى الطلبة والعوامل المؤثرة فيه.
- ✓ إجراء دراسة حول أساليب تنمية المنطق الرياضي لدى الطلبة.
- ✓ **قائمة المراجع:**
- ✓ - آدم، مرفت محمد. (2013). فعالية وحدة مقترحة في مبادئ المنطق الرياضي في تنمية التحصيل والتفكير المنطقي الرياضي والاحتفاظ بالتعلم لدى طلاب المرحلة الإعدادية مختلفي المستويات التحصيلية، *دراسات عربية في التربية وعلم النفس*، 36 (4): 71-98.
- ✓ - برتراند، راسل. (2011). *البناء المنطقي للعالم والمسائل الزائفة في الفلسفة*، ترجمة، يوسف تيبس، المنظمة العربية للترجمة، بيروت، لبنان، 2011.
- ✓ - بطرس، نضال متي. (2016). المنطق الرياضي وعلاقته ببعض المتغيرات لدي مدرسي رياضيات المرحلة الثانوية، *مجلة الجمعية العراقية للعلوم التربوية والنفسية*، 126 (1): 64 - 121.
- ✓ - الجنائني، هبة. (2017). المنطق الرياضي وآليات الاستنباط الدقيق، *مجلة وادي النيل للدراسات والبحوث الإنسانية والاجتماعية والتربوية بكلية الآداب، جامعة عين شمس*، 15 (15): 269-292.
- ✓ - الخطيب، محمد؛ وعابنة، عبدالله. (2011). أثر استخدام استراتيجية تدريبية قائمة على حل المشكلات على التفكير الرياضي والاتجاهات نحو الرياضيات لدى طلاب الصف السابع الأساسي في الأردن، *مجلة دراسات العلوم التربوية*، 38 (1): 1.
- ✓ - زيدان، محمود فهمي. (1989). *المنطق الرمزي نشأته وتطوره، الإسكندرية: مؤسسة شباب الجامعة*.
- ✓ - علي، أشرف. (2009). أثر استخدام المدخل المنظومي في تدريس الاحتمالات لطلاب المرحلة الإعدادية على زيادة التحصيل والتفكير الرياضي وخفض القلق الرياضي لديهم، *المؤتمر العلمي الحادي والعشرين: تطوير المناهج الدراسية بين الأصالة والمعاصرة، جامعة عين شمس بمصر*، 320-534.
- ✓ - عويرة، صفوان. (2024). *المنطق الرياضي، أسـتـرجـع من: (elearning.ens-bousaada.dz/login/index.php)*، بتاريخ: 18-6-2024م.
- ✓ - المفتي، محمد أمين. (٢٠٠٧). الرياضيات وتكوين العقل الجمعي وتنمية التفكير التعاوني، الجمعية المصرية لتربويات الرياضيات، المؤتمر العلمي السابع، دار الضيافة، جامعة عين شمس، ١٧، ١٨ يوليو.
- ✓ - هذال، تغريد خضير. (2022). المنطق الرياضي وعلاقته بالتحصيل والبرهان الرياضي في مادة التوبولوجي لدى طلبة كلية التربية الأساسية. *مجلة كلية التربية الأساسية*، 28 (115): 377-394, <https://doi.org/10.35950/cbej.v28i115.5821>.
- ✓ - هذال، تغريد. (2022). فعالية وحدة مقترحة في مبادئ المنطق الرياضي في تنمية التحصيل والتفكير المنطقي الرياضي والاحتفاظ بالتعلم لدى طلاب المرحلة الإعدادية مختلفي المستويات التحصيلية، *مجلة تربويات الرياضيات*، 20 (8): 158-192, (DOI: 10.21608/armin.2017.81656).
- ✓ - هذال، تغريد خضير؛ ومحمد، يوسف حسين. (2023). *مهارات الفهم العميق لدى طلبة كلية التربية الأساسية وعلاقتها بقدرتهم على حل المسألة الرياضية، مجلة كلية التربية الأساسية: I (1) المؤتمر العلمي السنوي السادس لقسم معلم الصفوف الأولى: 15-16/3/2023*.
- ✓ - Abu Zaydah, A & Al-Astal, I. (2015). The Effectiveness of an E-Book on Developing Mathematical Thinking Skills and Acquisition of Mathematical Concepts among 5th Graders in Gaza, *international Journal of Computer Applications* (0975 – 8887) ,Vol. 116 , No. 21 , April 2015,p24.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

- ✓ - Guy ,S.(2012).Mathematician Keith Devlin is the Executive Director of the Human-Sciences and Technologies Advanced Research Institute (H-STAR) at Stanford University and The Math September 1, 2012, pp. 59-61.
- ✓ - Mathematical Logic Exercises and Solutions", Springer Link, Retrieved 11/2/2022
- ✓ -Chiara G, Luciano S, MATHEMATICAL LOGIC EXERCISES, Page 12 21 22. WUCT121, Discrete Mathematics Logic Tutorial Exercises, Page 2.

ملحق- اختبار المنطق الرياضي مع الإجابات :

س1- العلاقة التي ليست عبارة رياضية هي:

$$5 \leq 3+2 \quad 5 = 3+2 \quad 5 < 3+2 \quad 5 = x+2$$

س2- نفي العبارة الآتية ($21 \leq 13$) هو:

$$21 \geq 13 \quad 21 > 13 \quad 13 \leq 21- \quad 21- \geq 13$$

س3- ما العبارة الرياضية التي قيمة صوابها (خ) فيما يلي:

رموز العد الثنائي هي: 1-2 رموز العد الثنائي هي: 0-1

1 جيجا= 10 بايت اميغا= 10 بايت

س4- ما الجملة الرياضية التي قيمة صوابها (ص) فيما يلي:

النتروجين من الهالوجينات الزئبق من المواد الصلبة

النحاس غير موصل للتيار الكهربائي الأكسجين ضروري للاحتراق

س5- المعاكس الإيجابي للعبارة: ف ~ ن:

ن ~ ف ن ~ ف ن ~ ف ن ~ ف

س6- نفي العبارة: (ف ن):

ن ~ ف ن ~ ف ن ~ ف ن ~ ف

س7- العبارة: ~ (ف 7 ن) =:

~ ف 7 ن ~ ف 8 ن (~ ف 8 ن) ف 8 ن

س8- نفي العبارة: ($1 \geq 1$):

$1 < 1$ س $1 > 1$ أوس $1 < 1$ س $1 < 1$ وس $1 > 1$ كل ما ذكر

س9- نفي العبارة: تتقدم الأمم فقط إذا تطورت في العلم:

لم تأخذ الأمم بالعلوم ولم تتقدم تقدمت الأمم ولم تأخذ بالعلم أخذت الأمم بالعلم ولم تتقدم إذا أخذت الأمم بالعلم فإنها تتقدم

س10- إذا كانت ف عبارة رياضية صحيحة، ن خاطئة، ما العبارة الرياضية المركبة الصحيحة فيما يلي:



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

ف 8 ن 8ف 8ن 7ف 7ن 7ف 7ن
س11- ما نفي هذه الجملة: ساقضي عطلتي الصيفية في اللاذقية أو في طرطوس:

لن أقضي عطلتي الصيفية في اللاذقية أو في طرطوس لن أسافر خلال عطلتي الصيفية لن أقضي عطلتي الصيفية في اللاذقية أو في طرطوس كل ما ذكر خطأ

س12- إذا كانت $x^3 = 0$ ، إذن $x < 2$ وإذا كان $x = 0$ أو $x = 1$ ، إذن $x^2 = 2$.
يوجد عدد طبيعي ورمزه x ، بحيث يكون x^2 مساوي -22. اكتب الحل:

الحل الصحيح: الجملة الأولى فيها بيان، وهي جملة خاطئة، وتمثل بالرموز $(x^2 \Rightarrow 23)$.
الجملة الثانية فيها بيان، وهي جملة صحيحة، وتمثل بالرموز $(x=0 \vee x=1) \leftarrow (x^2=1)$.
الجملة الثالثة فيها بيان، وهي جملة خاطئة.

س13- كم قطعة يمكنك تقسيم البيتزا إذا قمت بعمل 4 قطع مستقيمة؟

7 قطع 5 قطع 8 قطع 4 قطع
س14- بفرض أن أ = "كريس إيطالي"، ب = "جون إنجليزي"، ومن هذا الافتراض نريد معرفة صحة الجمل الآتية:

كريس ليس إيطالياً، كريس إيطالي بينما جون إنجليزي
إذا كان كريس إيطالياً، فإن جون ليس إنجليزياً

كريس إيطالي، وإذا لم يكن كريس إيطالياً فإن جون إنجليزي

إما كريس إيطالي وجون إنجليزي، أو كريس ليس إيطالياً وليس جون إنجليزي.
الحل: الجملة الأولى خاطئة.

الجملة الثانية خاطئة.

الجملة الثالثة صحيحة.

الجملة الرابعة الجزء الأول صحيح، بينما الجزء الثاني خاطئ.

الجملة الخامسة الجزء الأول صحيح، بينما الجزء الثاني خاطئ.

س15- إذا كانت كل القطط لها ذبول، والشوارب هي قطة، فهل للشوارب ذيل؟ اكتب الحل مع التبرير
نعم منطق: نعم، الشوارب لها ذيل (لأن جميع القطط لها ذبول)

Convert any square numerical matrix to an MARKOV matrix with modulo n

Dr. Mohammad Nur Shamma

Department of Basic Sciences - Faculty of Mechanical and Electrical Engineering -
Damascus University

Dr. Khalil Yahya

Department of Mathematics - Faculty of Science - Damascus University

Summary

The research is a special transition from a square numerical matrix of rank k to SM, i.e. a Markov matrix with the initial modulo n using the diagonal transformation matrix resulting from a special ray resulting from the given matrix, to be used in engineering



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

applications as well as information preservation, relying on a computer program to give quick results and great.

key words:

Shamma transformation matrix, MARKOV (n-primary Markov) matrix, plaintext, multiplicative inverse of modulo n-number, diagonal transformation matrix, inverse diagonal transformation matrix.

تحويل أية مصفوفة عددية مربعة إلى مصفوفة MARKOV بالقياس n

أ.د. محمد نور شمه

قسم العلوم الأساسية - كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية - جامعة دمشق

الملخص

بعد البحث انتقالاً خاصاً من مصفوفة عددية مربعة من المرتبة k إلى MARKOV أي مصفوفة ماركوف بالقياس الأولي n باستخدام مصفوفة التحويل القطرية الناتجة من شعاع خاص ناتج من المصفوفة المعطاة، للاستفادة منها في التطبيقات الهندسية وكذلك حفظ المعلومات، معتمدين في ذلك على برنامج حاسوبي ليعطي نتائج سريعة وكبيرة.

الكلمات المفتاحية:

مصفوفة تحويل Shamma، مصفوفة MARKOV (ماركوف بالقياس الأولي n)، النص الواضح، النظرير الضربي لعدد بالقياس n، مصفوفة التحويل القطرية، مصفوفة التحويل القطرية العكسية.

1 . مقدمة:

تعد مصفوفة ماركوف و مصفوفة ماركوف بالقياس الأولي n من المصفوفات الهامة للاستفادة منها في التطبيقات الهندسية وكذلك حفظ المعلومات، والتي تعتمد على نظرية الأعداد وخصوصاً النظرير الضربي بالقياس n معتمدين في ذلك على برنامج حاسوبي ليعطي نتائج سريعة وكبيرة هناك أبحاث نشرت قريبة من هذا الموضوع عن طريق الباحثين (Al-Khatib and Shamma) بسطت فكرت إيجاد النظرير الضربي [8]

2 . مفاهيم و تعاريف [2]، [3] .

تعريف 1 : نسمي M_n مجموعة جميع الأعداد الأولية نسبياً مع العدد n أي أن :

$$M_n = \{a \in \mathbb{N}; 1 \leq a \leq n, \gcd(a, n) = 1\}$$

نتيجة 1 : من التعريف السابق نستنتج أن : $M_{256} = \{1, 3, 5, \dots, 256\}$ عدد عناصرها 128 عدد طبيعي .

نتيجة 2 : كما نستنتج أن : $M_n = \{1, 2, 3, \dots, n-1\}$ عدد عناصرها n-1 عدد طبيعي إذا كان n عدداً أولياً.

تعريف 2 :

نقول إن العدد $a \in M_n$ هو النظرير الضربي للعدد $b \in M_n$ إذا كان باقي قسمة جداء العددين a.b على العدد n هو الواحد أي إذا تحقق:



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 آب 2024
دمشق - سورية

$$a \cdot b = 1 \pmod{n}$$

فالعددان 3, 171 متناظران بالقياس 256 لأن :

$$3 \cdot 171 = 513 = 2 \cdot 256 + 1 = 1 \pmod{256}$$

والعددان 4, 3 متناظران بالقياس 11 لأن :

$$3 \cdot 4 = 12 = 11 + 1 = 1 \pmod{11}$$

مبرهنة أولر 1 [5]:

لكل عدد $a \in M_n$ يوجد نظير ضربي $b \in M_n$ وحيد .
 فالعدد 3 يملك نظير ضربي وحيد بالقياس 256 هو العدد 171 .

تعريف 3:

شعاع ماركوف بالقياس n هو الشعاع (a_1, a_2, \dots, a_k) حيث إن جميع عناصره أولية نسبياً بالقياس n ، وإذا دخل على مصفوفة مربعة من المرتبة k وضربنا العمود الأول بالعدد a_1 ، وضربنا العمود الثاني بالعدد a_2 ، .. ، وضربنا العمود الأخير بالعدد a_k نحصل على مصفوفة جديدة مجموع أي عمود فيها يساوي الواحد بالقياس n .

تعريف 4:

شعاع ماركوف العكسي بالقياس n هو الشعاع (b_1, b_2, \dots, b_k) حيث إن جميع عناصره أولية نسبياً بالقياس n ، وإذا دخل على مصفوفة مربعة من المرتبة k وضربنا العمود الأول بالعدد b_1 ، وضربنا العمود الثاني بالعدد b_2 ، .. ، وضربنا العمود الأخير بالعدد b_k نحصل على مصفوفة جديدة مربعة من المرتبة k بالقياس n .

تعريف 5:

مصفوفة Shamma-Markov : اختصاراً (MARKOV) مصفوفة ماركوف بالقياس n أي مصفوفة مربعة يكون فيها مجموع أي عمود يساوي الواحد بالقياس n

مثال (1) :

$$\text{المصفوفة التالية : } \begin{bmatrix} 2 & 12 & 42 \\ 4 & 15 & 48 \\ 6 & 18 & 54 \end{bmatrix} \text{ مصفوفة MARKOV بالقياس 11}$$

حيث إن مجموع عناصر العمود الأول $(12 = 11 + 1 = 1 \pmod{11})$ و مجموع عناصر

العمود الثاني $(45 = 11 \cdot 4 + 1 = 1 \pmod{11})$ و مجموع عناصر العمود الثالث

$(144 = 11 \cdot 13 + 1 = 1 \pmod{11})$.

تعريف 6:

مصفوفة تحويل Shamma : مصفوفة قطرية مربعة تضرب بالمصفوفة الأساسية فتحولها إلى مصفوفة MARKOV بالقياس n .

مثال (2) : المصفوفة الأساسية $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ نضربها بمصفوفة تحويل Shamma التالية :

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 آب 2024
دمشق - سورية

فترد إلى المصفوفة التالية: $\begin{bmatrix} 2 & 12 & 42 \\ 4 & 15 & 48 \\ 6 & 18 & 54 \end{bmatrix}$ مصفوفة MARKOV بالقياس 11

أهم نتائج البحث:

سنقوم بإثبات مبرهنتين أساسيتين الأولى تحول كل مصفوفة مربعة من المرتبة k إلى مصفوفة MARKOV ماركوف بالقياس n عن طريق شعاع ماركوف ، والمبرهنة الثانية كل مصفوفة ماركوف من المرتبة k بالقياس n ترد إلى مصفوفة مربعة من المرتبة k عن طريق شعاع ماركوف العكسي

مبرهنة (1):

كل مصفوفة مربعة من المرتبة k تحول إلى مصفوفة ماركوف بالقياس n عن طريق شعاع ماركوف

الإثبات:
 بفرض لدينا مصفوفة مربعة من المرتبة k التالية :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{bmatrix}$$

ومجموع الأعمدة على الشكل التالي:

$$\left[\sum_{j=1}^k a_{1j} \quad \sum_{j=1}^k a_{2j} \quad \dots \quad \sum_{j=1}^k a_{kj} \right]$$

نأخذ المجموع بالقياس n فنحصل على المصفوفة السطرية (a_1, a_2, \dots, a_k) ، والآن نضرب أعمدة المصفوفة بشعاع ماركوف العكسي (b_1, b_2, \dots, b_k) لنحصل على المصفوفة التالية :

$$\left[\sum_{j=1}^k b_1 a_{1j} \quad \sum_{j=1}^k b_2 a_{2j} \quad \dots \quad \sum_{j=1}^k b_k a_{kj} \right]$$

$$[b_1 \cdot a_1 \quad b_2 \cdot a_2 \quad \dots \quad b_k \cdot a_k]$$

$$= [1 \text{ mod } n \quad 1 \text{ mod } n \quad \dots \quad 1 \text{ mod } n]$$

أي أن مجموع كل عمود من أعمدة المصفوفة الجديدة هو الواحد بالقياس n ، وهي مصفوفة ماركوف التالية:

$$B = \begin{bmatrix} b_1 a_{11} & b_2 a_{12} & \dots & b_k a_{1k} \\ b_1 a_{21} & b_2 a_{22} & \dots & b_k a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 a_{n1} & b_2 a_{n2} & \dots & b_k a_{nk} \end{bmatrix}$$

مبرهنة (2):



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

كل مصفوفة (MARKOV) ماركوف بالقياس n من المرتبة k تحول إلى مصفوفة مربعة أساسية عن طريق
شعاع ماركوف
الموافق
الإثبات:

بفرض لدينا مصفوفة ماركوف بالقياس n من المرتبة k التالية :

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nk} \end{bmatrix}$$

ومجموع الأعمدة على الشكل التالي :

$$\left[\sum_{j=1}^k c_{1j} \quad \sum_{j=1}^k c_{2j} \quad \dots \quad \sum_{j=1}^k c_{kj} \right]$$

نأخذ المجموع بالقياس n فنحصل على المصفوفة السطرية (a_1, a_2, \dots, a_k) ، والآن نضرب أعمدة المصفوفة بشعاع ماركوف العكسي (b_1, b_2, \dots, b_k) لنحصل على المصفوفة التالية :

$$\left[\sum_{j=1}^k b_1 c_{1j} \quad \sum_{j=1}^k b_2 c_{2j} \quad \dots \quad \sum_{j=1}^k b_k c_{kj} \right]$$

أي أن مجموع كل عمود من أعمدة المصفوفة الجديدة لا يساوي الواحد بالقياس n ، وهي مصفوفة غير ماركوفية من الشكل التالي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{bmatrix}$$

مثال (3):

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{bmatrix} : \text{ لو أخذنا مصفوفة النص الأساسي رقمياً :}$$

فإن مجموع الأعمدة على الشكل التالي:

$$\left[\sum_{j=1}^k a_{1j} \quad \sum_{j=1}^k a_{2j} \quad \dots \quad \sum_{j=1}^k a_{kj} \right]$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$= [10, 26, 42, 58]$$

نأخذ المجموع بالقياس $n=17$ فنحصل على المصفوفة السطرية $[10, 9, 8, 7]$ ، والآن نضرب أعمدة المصفوفة بشعاع ماركوف العكسي $[12, 2, 15, 5]$ لنحصل على المصفوفة السطرية التالية :

$$[10.12 \quad 9.2 \quad 8.15 \quad 7.5]$$

$$= [1 \text{ mod } 17 \quad 1 \text{ mod } 17 \quad \dots \quad 1 \text{ mod } 17]$$

أي أن مجموع كل عمود من أعمدة المصفوفة الجديدة هو الواحد بالقياس 17 ، وهي مصفوفة ماركوف التالية:

$$B = \begin{bmatrix} 1.12 & 5.2 & 9.15 & 13.5 \\ 2.12 & 6.2 & 10.15 & 14.5 \\ 3.12 & 7.2 & 11.15 & 15.5 \\ 4.12 & 8.2 & 12.15 & 16.5 \end{bmatrix}$$

وبالإصلاح نجد:

$$B = \begin{bmatrix} 12 & 10 & 135 & 65 \\ 24 & 12 & 150 & 70 \\ 36 & 14 & 165 & 75 \\ 48 & 16 & 180 & 80 \end{bmatrix}$$

نأخذ جميع العناصر بالقياس 17 فنحصل على مصفوفة ماركوف التالية:

$$B \text{ mod } 17 = \begin{bmatrix} 12 & 10 & 16 & 14 \\ 7 & 12 & 14 & 2 \\ 2 & 14 & 12 & 7 \\ 14 & 16 & 10 & 12 \end{bmatrix}$$

مثال (4):

لو أخذنا المصفوفة التالية:

$$B = \begin{bmatrix} 12 & 10 & 16 & 14 \\ 7 & 12 & 14 & 2 \\ 2 & 14 & 12 & 7 \\ 14 & 16 & 10 & 12 \end{bmatrix}$$

حيث إن مجموع الأعمدة على الشكل التالي:

$$\left[\sum_{j=1}^k a_{1j} \quad \sum_{j=1}^k a_{2j} \quad \dots \quad \sum_{j=1}^k a_{kj} \right]$$

$$= [35, 52, 52, 35]$$

$$= [1, 1, 1, 1] \text{ mod } 17$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

فهي مصفوفة ماركوف بالقياس $n=17$ ، ولتحويلها إلى مصفوفة مربعة أساسية نضرب أعمدة المصفوفة بشعاع ماركوف $[10, 9, 8, 7]$ أي نضرب العمود الأول بالعدد 10 كما نضرب العمود الثاني بالعدد 9 ونضرب العمود الثالث بالعدد 8 والعمود الرابع بالعدد 7 فنحصل على المصفوفة التالية:

$$B = \begin{bmatrix} 120 & 90 & 128 & 98 \\ 70 & 108 & 112 & 214 \\ 20 & 126 & 96 & 49 \\ 140 & 144 & 80 & 84 \end{bmatrix}$$

نأخذ جميع العناصر بالقياس 17 فنحصل على المصفوفة الأساسية التالية:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{bmatrix}$$

التحويل إلى (MARKOV) باستخدام مصفوفة تحويل Shamma:

المبرهنتين التاليتين تعطيان صيغتين بديلتين لشعاعي ماركوف وعكسه عن طريق مصفوفة تحويل Shamma وتحويل Shamma العكسي.

مبرهنة (3):

كل مصفوفة مربعة من المرتبة k تحول إلى (MARKOV) مصفوفة ماركوف بالقياس n عن طريق مصفوفة تحويل Shamma المناسبة.

لإثبات:

بفرض لدينا مصفوفة مربعة من المرتبة k التالية :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix}$$

ومجموع الأعمدة على الشكل التالي:

$$\left[\sum_{j=1}^k a_{1j} \quad \sum_{j=1}^k a_{2j} \quad \dots \quad \sum_{j=1}^k a_{kj} \right]$$

نأخذ المجموع بالقياس n فنحصل على المصفوفة السطرية (a_1, a_2, \dots, a_k) ، وشعاع ماركوف العكسي (b_1, b_2, \dots, b_k) عندئذ نضرب المصفوفة A بمصفوفة تحويل Shamma العكسية التالية:



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & b_k \end{bmatrix}$$

فحصل على مصفوفة MARKOV التالية:

$$B = M^{-1}.A = \begin{bmatrix} b_1 a_{11} & b_2 a_{12} & \dots & b_2 a_{1k} \\ b_1 a_{21} & b_2 a_{22} & \dots & b_2 a_{2k1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1 a_{n1} & b_2 a_{n2} & \dots & b_2 a_{kk} \end{bmatrix}$$

وهي نفس مصفوفة ماركوف الناتجة في المبرهنة (1).

مبرهنة (4):

كل مصفوفة (MARKOV) ماركوف بالقياس n من المرتبة k تحول إلى مصفوفة مربعة أساسية عن طريق

الموافق **Shamma** تحويل مصفوفة الإثبات:

بفرض لدينا مصفوفة ماركوف بالقياس n من المرتبة k التالية :

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1k} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2k1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{kk} \end{bmatrix}$$

ومجموع الأعمدة الواحد بالقياس n على الشكل التالي:

$$\left[\sum_{j=1}^k c_{1j} \quad \sum_{j=1}^k c_{2j} \quad \dots \quad \sum_{j=1}^k c_{kj} \right]$$

والآن نضرب المصفوفة C بمصفوفة التحويل **Shamma** الموافقة للشعاع (a_1, a_2, \dots, a_k) وهي :

$$S = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_k \end{bmatrix}$$

لنحصل على المصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} a_1. c_{11} & a_2. c_{12} & \dots & a_k. c_{1k} \\ a_1. c_{21} & a_2. c_{22} & \dots & a_k. c_{2k1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1. c_{n1} & a_2. c_{n2} & \dots & a_k. c_{kk} \end{bmatrix}$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 آب 2024
دمشق - سورية

وبأخذ المصفوفة الجديدة بالقياس n ، نحصل على مصفوفة مربعة أساسية من الشكل التالي:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{bmatrix}$$

مثال (5):

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{bmatrix} : \text{ لو أخذنا مصفوفة النص الأساسي رقمياً:}$$

فإن مجموع الأعمدة على الشكل التالي:

$$\left[\sum_{j=1}^k a_{1j} \quad \sum_{j=1}^k a_{2j} \quad \dots \quad \sum_{j=1}^k a_{kj} \right]$$

$$= [10, 26, 42, 58]$$

نأخذ المجموع بالقياس $n=17$ فنحصل على المصفوفة السطرية $[10, 9, 8, 7]$ ، يكون بشعاع ماركوف العكسي $[12, 2, 15, 5]$ لذلك نضرب المصفوفة X بمصفوفة تحويل **Shamma** العكسية التالية:

$$S^{-1} = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

أي أن مجموع كل عمود من أعمدة المصفوفة الجديدة هو الواحد بالقياس 17، وهي مصفوفة ماركوف التالية:

$$B = S^{-1} \cdot X = \begin{bmatrix} 1.12 & 5.2 & 9.15 & 13.5 \\ 2.12 & 6.2 & 10.15 & 14.5 \\ 3.12 & 7.2 & 11.15 & 15.5 \\ 4.12 & 8.2 & 12.15 & 16.5 \end{bmatrix}$$

وبالإصلاح نجد:

$$B = \begin{bmatrix} 12 & 10 & 135 & 65 \\ 24 & 12 & 150 & 70 \\ 36 & 14 & 165 & 75 \\ 48 & 16 & 180 & 80 \end{bmatrix}$$

نأخذ جميع العناصر بالقياس 17 فنحصل على مصفوفة **MARKOV** بالقياس 17 التالية:

$$B \text{ mod } 17 = \begin{bmatrix} 12 & 10 & 16 & 14 \\ 7 & 12 & 14 & 2 \\ 2 & 14 & 12 & 7 \\ 14 & 16 & 10 & 12 \end{bmatrix}$$

مثال (6):

لو أخذنا المصفوفة التالية:



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$B = \begin{bmatrix} 12 & 10 & 16 & 14 \\ 7 & 12 & 14 & 2 \\ 2 & 14 & 12 & 7 \\ 14 & 16 & 10 & 12 \end{bmatrix}$$

حيث إن مجموع الأعمدة من الشكل التالي:

$$\left[\sum_{j=1}^k a_{1j} \quad \sum_{j=1}^k a_{2j} \quad \dots \quad \sum_{j=1}^k a_{kj} \right]$$
$$= [35, 52, 52, 35]$$

$$= [1, 1, 1, 1] \text{ mod } 17$$

فهي مصفوفة (MARKOV) بالقياس 17، ولتحويلها إلى مصفوفة مربعة أساسية نضربها بمصفوفة تحويل Shamma [10, 9, 8, 7]

$$S = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

أي نضرب العمود الأول بالعدد 10 كما نضرب العمود الثاني بالعدد 9 ونضرب العمود الثالث بالعدد 8 والعمود الرابع بالعدد 7 فنحصل على المصفوفة التالية:

$$X = S.B = \begin{bmatrix} 120 & 90 & 128 & 98 \\ 70 & 108 & 112 & 214 \\ 20 & 126 & 96 & 49 \\ 140 & 144 & 80 & 84 \end{bmatrix}$$

نأخذ جميع العناصر بالقياس 17 فنحصل على المصفوفة الأساسية التالية:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{bmatrix}$$

Reference

1. B. Schneier « Applied cryptography. Second edition« protocols, algorithms and source coding C (John Wiley\& Sons), 1996.
2. F. A. Zoukair« and A. Samhan« Introduction to number theory, Pub. Dist. Center« Riyadh« (Arabic version), 2001
3. H.S.A. Rose« Course in number theory. Oxford Sciences Publication. (Clarendon), 1988.



**المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية**

4. M. I. Sowalle, Introduction to cryptology, Dist. Center, (Arabic version) Riyadh, 1996.
5. Modern Cryptography: Applied Mathematics for Encryption and Information Security, Springer, William Easttom 2020.
6. Swapan Kumar Sarkar, a text book of discret mathematics s. chand & company ltd. New Delhi-110055, 2008.
7. Cryptology Classical and Modern By Richard E. Klima, Neil P. Sigmon, Neil Sigmon Copyright Year 2019
8. Al Khatib and Shamma, An algorithm for determining a relatively prime number and its symmetric product with base n. Journal of Natural Sciences and Mathematics (jnm) Vol.3 No.1 (2009).
9. Al Khatib and Shamma, On the modern cryptology method of Hill for encoded letters with ASCII system. Far East Journal of Mathematical Education FJME Volume 3 No. 2 (2009) June, pp. 183 – 193.
10. Al Khatib and Shamma, Generating basic Pythagorean triples from private integers, Journal of AL Baath University, Volume 38 (2016)
11. Al Khatib and Shamma, the encryption using the operator integration applied to the system ASCII encoded messages, Journal of AL Baath University, Volume 38 (2015)
12. Al Khatib and Shamma, THE ENCRYPTION USING SPECIAL PYTHAGOREAN FUNCTION, Journal of AL Baath University, Volume 38 (2016)
13. Al Khatib and Shamma, Arab encryption developer, Journal of AL Baath University for engineering science, Volume 30 N.17(2008).

Solving the Hotdog Problem by Using the Joint Zero-order Finite Hankel - Elzaki Transform

Dr.Roqia Khaled Rdwan^{1*}

Dr.Mohammed Mahmoud Amer²

^{1,2}Department of Mathematics, College of Science, University of Albaath, Homs, Syria.

E-mail address: roqiardwan1993@gmail.com, Amer09656@gmail.com

ORCID ID: *<https://orcid.org/0000-0003-0895-0185>, ²<https://orcid.org/0000-0001-7578-0660>

Abstract:

This paper is concerned with combining two different transforms to present a new joint transform FHET and its inverse transform IFHET. Also, the most important property of FHET was concluded and proved, which is called the finite Hankel – Elzaki transforms of



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

the Bessel differential operator property, this property was discussed for two different boundary conditions, Dirichlet and Robin. Where the importance of this property is shown by solving axisymmetric partial differential equations and transitioning to an algebraic equation directly. Also, the joint Finite Hankel-Elzaki transform method was applied in solving a mathematical-physical problem, which is the Hotdog Problem. A steady state which does not depend on time was discussed for each obtained general solution, i.e. in the boiling and cooling states. To clarify the idea of temperature rise and fall over the time domain given in the problem, some figures were drawn manually using Microsoft PowerPoint. The obtained results confirm that the proposed transform technique is efficient, accurate, and fast in solving axisymmetric partial differential equations.

Keywords: Bessel differential operator, Boiling, Cooling, Elzaki transform, Finite Hankel transform, Hotdog, joint zero-order Finite Hankel - Elzaki transform, Partial Differential Equation.

حل مسألة هوت دوغ بطريقة تحويل هانكل المنتهي من الرتبة الصفرية – الزاكي
المشتركة

د. رقية خالد رضوان¹ د. محمد محمود عامر²
^{1,2} قسم الرياضيات، كلية العلوم، جامعة البعث، حمص، سوريا.

الخلاصة:

يختص هذا البحث بدمج تحويلين مختلفين معاً لتقديم تحويل مشترك جديد FHET وتحويله العكسي IFHET، كما أنه تم إيجاد أهم خصائص FHET وإثباتها، والتي تسمى خاصية تحويل هانكل المنتهي-الزاكي لمؤثر ببسل التفاضلي، تمت مناقشة هذه الخاصة لأجل شرطين حديين مختلفين هما ديرخلية وروبين. حيث تظهر أهمية هذه الخاصة من خلال حل المعادلات التفاضلية الجزئية ذات التماثل المحوري والانتقال إلى معادلة جبرية بشكل مباشر. أيضاً تم تطبيق طريقة تحويل هانكل المنتهي-الزاكي المشتركة في حل مسألة رياضية فيزيائية وهي مسألة هوت دوغ (النفاق). تم مناقشة الحالة المستقرة التي لا تعتمد على الزمن لكل حل عام حصلنا عليه أي في الحالتين الغليان والتبريد. لتوضيح فكرة ارتفاع وانخفاض الحرارة على المجال الزمني المعطى في المسألة، تم رسم بعض الأشكال يدوياً على برنامج بوربوينت. تؤكد النتائج التي حصلنا عليها أن تقنية التحويل المقترحة فعالة ودقيقة وسريعة في حل المعادلات التفاضلية الجزئية المتماثلة المحور.

كلمات مفتاحية: مؤثر ببسل التفاضلي، غليان، تبريد، تحويل الزاكي، تحويل هانكل المنتهي، هوت دوغ (نفاق)، تحويل هانكل المنتهي-الزاكي المشترك، معادلة تفاضلية جزئية.

مقدمة:

تم تقديم تحويل هانكل المنتهي لأول مرة بواسطة سنيديون (Sneddon) عام 1946 حيث تظهر أهمية هذا التحويل من خلال تعيين حل العديد من المسائل الابتدائية والحدية التي لها دور في حل المسائل الرياضية الفيزيائية ذات التماثل المحوري¹. قدّم (Watugala) في مطلع التسعينيات من القرن العشرين تحويلاً تكاملياً عرّف باسم سوميدو وقد تم استخدامه



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

لإيجاد حلول المعادلات التفاضلية العادية (ODEs). وقد قام طارق الزاكي (Tariq Elzaki) عام 2010 بتعديل تحويل سوميدو وأعطى تقنية جديدة استخدمت في تطبيقات عدّة نذكر منها تعيين حل المسائل الابتدائية والحدية^{2,3}، وحل معادلات تفاضلية جزئية أيضاً (PDEs)⁴، حيث يمكن وصف العديد من الظواهر التي تنشأ في مجال الفيزياء الرياضية بواسطة المعادلات التفاضلية الجزئية (PDEs)⁵.

تظهر المعادلات التفاضلية الجزئية في العديد من تطبيقات الرياضيات، الفيزياء، الكيمياء والهندسة، ولهذا السبب قدم الباحث عدداً من الطرق لحلها، مثل تحويلات الزاكي⁶، لابلاس، هانكل... الخ، بالإضافة إلى ذلك، تناول بعض الباحثين هذه التحويلات ودمجها⁷، والغرض الأساسي من هذا البحث هو إظهار تحويل مزدوج جديد فعال^{8,9}.

التحويلات التفاضلية المزدوجة، خصائصها ونظرياتها لا تزال جديدة وقيد الدراسة¹⁰، تحويلي هانكل المنتهي والزاكي لهما أهمية كبيرة في حل المعادلات التفاضلية الجزئية حيث بتطبيق كل تحويل بشكل مفرد على معادلة تفاضلية جزئية يعطينا معادلة تفاضلية عادية، لكن دمج هذين التحويلين في تحويل واحد ينقلنا مباشرة إلى معادلة جبرية وذلك عند تطبيق التحويل المشترك على معادلة تفاضلية جزئية، وهذه الطريقة تعتبر أسرع بالحل من تطبيق كل تحويل بشكل مفرد.

تعتبر هذه الطريقة فعالة جداً في حل المعادلات التفاضلية التي ترتبط بالعلوم الهندسية والفيزيائية مقارنة بالطرق الأخرى لأنها تحتاج إلى خطوة واحدة فقط للحصول على الحل الدقيق، بينما تحتاج الطرق الأخرى إلى مزيد من الخطوات للحصول على الحل الدقيق^{11,12}.

تكمن أهمية البحث باستخدام طريقة جديدة استخدمت لأول مرة في حل معادلات تفاضلية جزئية ذات شروط ابتدائية وحدية يوجد فيها تناظر محوري هي طريقة تحويل هانكل المنتهي-الزاكي المشتركة، والهدف من البحث هو تطوير طرق حل المعادلات التفاضلية الجزئية بطرق أسرع تعطي معادلة جبرية بشكل مباشر، وقد درسنا في هذا البحث دراسة تحويل هانكل المنتهي من الرتبة الصفريّة-الزاكي المشترك بشكل خاص، حيث أنّ هذه الطريقة تنقلنا بشكل مباشر إلى معادلة جبرية..

الهدف الرئيسي للبحث هو تعريف طريقة FHET وتطبيق عليها هو حل مسألة هوت دوغ التي تتألف من معادلة حرارة وحالتين مختلفتين هما: المرحلة الأولى مرحلة التسخين بشرط ابتدائي وشرط حدي (ديرخليه) والمرحلة الثانية مرحلة التبريد بشرط ابتدائي وشرط حدي (روبين). سوف نقوم بتطبيق طريقة FHET لإيجاد الحل العام لمعادلة الحرارة في كل مرحلة، وسندرس الحالة المستقرة للحل العام لمعادلة الحرارة أيضاً في كل مرحلة، وسنقوم برسم توضيحي للمجال الزمني بالنسبة لارتفاع وانخفاض الحرارة، وأيضاً دراسة درجة حرارة النقطة المركزية ورسمها.

مواد وطرق البحث:

مفاهيم أساسية:

التبريد: التبريد هو عملية يتم فيها سحب أو إزالة الحرارة، فهو التقنية التي تختص بخفض درجة حرارة حيز ما أو مادة من المواد إلى درجة حرارة أقل من درجة حرارة الجو المحيط والمحافظة عليها باستمرار على هذه الدرجة المنخفضة.

الغليان: هو نمط من التبخير (تغير طور المادة من الحالة السائلة إلى الحالة الغازية)، أي الغليان: هو التحول السريع لسائل ما إلى بخار عندما تصل درجة حرارته إلى نقطة غليانه، وهي درجة الحرارة التي يصبح عندها ضغط البخار للسائل مساوياً للضغط الخارجي المطبق على سطح هذا السائل.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

هوت دوغ: هوت دوغ (النفائق) عبارة عن غلاف رقيق طويل يحتوي على اللحم المفروم مضاف إليه التوابل والبهارات. هذا الغلاف هو عادة الأمعاء الحيوانية. ومع ذلك، في بعض الأحيان سوف ترى أغلفة الاصطناعية كذلك. بعض أنواع النفائق تمر بعملية الطهي عند إعدادها. في بعض الأحيان يتم إزالة الغلاف بعد ذلك.

دوال بيسل¹³:

هي حلول المعادلة التفاضلية

$$1x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0$$

حيث v وسيط، و $J_v(x)$ دالة بيسل من النوع الأول والترتيب v ويمكن أن تسمى بالدالة الاسطوانية.

تعرف $J_v(x)$ بالشكل:

$$J_v(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+v}}{m! \Gamma(m+v+1)} ; v \geq 0$$

مؤثر بيسل التفاضلي¹³:

مؤثر بيسل التفاضلي

$$\Delta_v = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{v^2}{r^2} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right) - \frac{v^2}{r^2}$$

3

المشتق من مؤثر لابلاس

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

4

بعد فصل المتغيرات في إحداثيات اسطوانية (r, θ, z) .

يعتبر مؤثر بيسل التفاضلي مفيد في حل مسائل التناظر الاسطواني

بعض العلاقات التكرارية لدوال بيسل¹³:

$$J'_v(x) = \frac{v}{x} J_v(x) - J_{v+1}(x)$$

5

$$\frac{d}{dx} (x^v J_v(x)) = x^v J_{v-1}(x)$$

6

حيث $v \geq 0$ وصحيح.

متسلسلة ذات الحدين¹³:

المتسلسلة ذات الحدين تعرف بالشكل:



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$(1+x)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{n} x^n \quad ; |x| < 1$$

7

حيث:

$$\binom{-\alpha}{n} = \frac{(-1)^n (\alpha)_n}{n!} \Rightarrow (1+x)^{-\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n}{n!} (-x)^n \quad ; |x| <$$

1

8

حيث $(\alpha)_n$ يسمى رمز بوشهرم أو رمز آبل ويعرّف بالشكل:

$$(\alpha)_n = \frac{1.2 \dots (\alpha-1) \alpha (\alpha+1) \dots (\alpha+n-1)}{1.2 \dots (\alpha-1)} = \frac{(\alpha+n-1)!}{(\alpha-1)!} = \frac{\Gamma(\alpha+n)}{\Gamma(\alpha)}$$

9

صيغة ليجندر!:

صيغة ليجندر تعطي بالشكل:

$$\sqrt{\pi} \Gamma(2x) = 2^{2x-1} \Gamma(x) \Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) \quad 10$$

تحويل هانكل المنتهي!:

تعريف 1: تحويل هانكل المنتهي (FHT) بالترتيب v للدالة $f(r)$ الذي يرمز له بالرمز $\tilde{f}_v(k_i) = H_v\{f(r)\}$ يُعرّف بالشكل:

$$\tilde{f}_v(k_i) = H_v\{f(r)\} = \int_0^a r f(r) J_v(r k_i) dr \quad ; v > -\frac{1}{2} \quad 11$$

حيث $r J_v(r k_i)$ نواة تحويل هانكل المنتهي حيث $r \geq 0$ و $J_v(r k_i)$ دالة بيسل من النوع الأول والترتيب v .
 حيث الشروط الكافية لوجود الدالة $f(r)$ هي:

- $f(r)$ مستمرة قطعياً على المجال $[0, a]$.
- $\int_0^a \sqrt{r} |f(r)| dr < \infty$.

تعريف 2: التحويل العكسي لتحويل هانكل (IFHT) بالترتيب v الذي يرمز له بالرمز $H_v^{-1}\{\tilde{f}_v(k_i)\} = f(r)$ يُعرّف:

12

$$H_v^{-1}\{\tilde{f}_v(k_i)\} = f(r) = \frac{2}{a^2} \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{f}_v(k_i) \frac{J_v(r k_i)}{j_{v+1}^2(a k_i)}$$

حيث الجمع يؤخذ على جميع الجذور الموجبة للمعادلة $J_v(a k_i) = 0$
 $J_v(a k_i) = 0$ يسمى شرط ديرخليه.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

ملاحظة 1: إذا كانت $v = 0$ عندئذ $H_0\{f(r)\}$ يسمى تحويل هانكل المنتهي من الرتبة الصفرية.

مثال 1: لتكن $f(r) = r^v$ عندئذ بنطبق Eq. 11

$$\tilde{f}_v(k_i) = H_v\{r^v\} = \int_0^a r^{v+1} J_v(rk_i) dr = \frac{1}{k_i} \int_0^a \frac{d}{dr} r^{v+1} J_{v+1}(rk_i) dr = \frac{a^{v+1}}{k_i} J_{v+1}(ak_i)$$

باستخدام العلاقة 6.

الخواص الأساسية لتحويل هانكل المنتهي 1:

- إذا كان $\tilde{f}_v(k_i) = H_v\{f(r)\}$ تحويل هانكل المنتهي للدالة $f(r)$ و $\tilde{g}_v(k_i) = H_v\{g(r)\}$ تحويل هانكل المنتهي للدالة $g(r)$ عندئذ:

$$H_v\{c_1 f(r) + c_2 g(r)\} = c_1 H_v\{f(r)\} + c_2 H_v\{g(r)\} = c_1 \tilde{f}_v(k_i) + c_2 \tilde{g}_v(k_i) \quad 13$$

- إذ كان $\tilde{f}_v(k_i) = H_v\{f(r)\}$ تحويل هانكل المنتهي للدالة $f(r)$ عندئذ:

$$1 - H_v\{f'(r)\} = \frac{k_i}{2v} ((v-1)H_{v+1}\{f(r)\} - (v+1)H_{v-1}\{f(r)\}) \quad ; \quad v \geq 1 \quad 14$$

حيث k_i الجذور الموجبة للمعادلة $J_v(ak_i) = 0$.

$$2 - H_v\left\{\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rf'(r)) - \frac{v^2}{r^2} f(r)\right\} = ak_i f(a) J_{v+1}(ak_i) - k_i^2 \tilde{F}_v(k_i) \quad 15$$

حيث k_i الجذور الموجبة للمعادلة $J_v(ak_i) = 0$.

$$3 - H_v\left\{\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rf'(r)) - \frac{v^2}{r^2} f(r)\right\} = a(f'(a) + hf(a)) J_v(ak_i) - k_i^2 \tilde{F}_v(k_i) \quad 16$$

حيث k_i الجذور الموجبة للمعادلة $hJ_v(ak_i) + k_i J'_v(ak_i) = 0$ تحويل هانكل المنتهي المعدل: 13

تعريف 3: تحويل هانكل المنتهي بالترتيب v للدالة $f(r)$ يُعرّف بالشكل

$$\tilde{f}_v(k_i) = H_v\{f(r)\} = \int_0^a rf(r) J_v(rk_i) dr \quad ; \quad v > -\frac{1}{2} \quad 17$$

حيث k_i الجذور الموجبة للمعادلة $hJ_v(ak_i) + k_i J'_v(ak_i) = 0$ عندئذ Eq. 17 تسمى تحويل هانكل المنتهي المعدل (MFHT).

تعريف 4: التحويل العكسي لتحويل هانكل المعدل بالترتيب v (IMFHT) يُعرّف بالشكل:

$$H_v^{-1}\{\tilde{f}(k_i)\} = f(r) = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{k_i^2}{(h^2 + k_i^2)a^2 - v^2} \frac{J_v(rk_i)}{(J_v(ak_i))^2} \tilde{f}_v(k_i) \quad 18$$

حيث k_i الجذور الموجبة للمعادلة $hJ_v(ak_i) + k_i J'_v(ak_i) = 0$ تسمى شرط روبين.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

تحويل الزاكي (تحويل سوميدو المعدل): 3.14.

تعريف 5: تحويل الزاكي (ET) للدالة $f(t)$ الذي يرمز له بالرمز $T(p) = E(f(t))$ يُعرّف بالشكل:

$$T(p) = E(f(t)) = p \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{p}} f(t) dt$$

19

حيث $f(t)$ تنتمي إلى المجموعة A المعرفة بالشكل:

$$A = \left\{ f(t); \exists M, k_1, k_2 > 0; |f(t)| < M e^{\frac{|t|}{k_1}}, \text{ if } t \in (-1)^j \times [0, \infty[\right\}$$

كما أنّ الشروط الكافية لوجود الدالة $f(t)$ هي:

- $f(t)$ مستمرة قطعياً على المجال $[0, \infty]$.
- $f(t)$ ذات ترتيب أسي.

تعريف 5: إذا كانت $f(t)$ دالة، و $E\{f(t)\} = T(p)$ عندئذٍ $E^{-1}\{T(p)\} = f(t)$ يسمى التحويل العكسي لتحويل الزاكي (IET).

3.4 الخواص الأساسية لتحويل الزاكي:

$$E\left(\frac{df(t)}{dt}\right) = \frac{1}{p}T(p) - pf(0) \quad 20$$

$$\Rightarrow E\left(\frac{df(x,t)}{dt}\right) = \frac{1}{p}T(x,p) - pf(x,0) \quad 21$$

$$E\{t^n\} = n! p^{n+2} = \Gamma(n+1)p^{n+2} \quad 22$$

تحويل الزاكي لبعض الدوال الأساسية: 3.14.

إذا كانت $f(t) = 1$ عندئذٍ:

$$E(1) = p \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{p}} dt = -p^2 e^{-\frac{t}{p}} \Big|_0^{\infty} = p^2 \quad 23$$

إذا كانت $f(t) = e^{-at}$ عندئذٍ:

$$E(e^{-at}) = p \int_0^{\infty} e^{-t(\frac{1}{p}+a)} dt = \frac{p}{\frac{1}{p}+a} e^{-t(\frac{1}{p}+a)} \Big|_0^{\infty} = \frac{p^2}{1+ap} \Rightarrow$$

$$E^{-1}(E(e^{-at})) = E^{-1}\left(\frac{p^2}{1+ap}\right) \Rightarrow E^{-1}\left(\frac{p^2}{1+ap}\right) = e^{-at} \quad 24$$

إذا كانت $f(t) = 1 - e^{-at}$ عندئذٍ:

$$E(1 - e^{-at}) = E(1) - E(e^{-at}) = p^2 - \frac{p^2}{1+ap} = \frac{p^2 + ap^3 - p^2}{1+ap} = \frac{ap^3}{1+ap} \Rightarrow$$

$$E^{-1}E(1 - e^{-at}) = aE^{-1}\left(\frac{p^3}{1+ap}\right) \Rightarrow E^{-1}\left(\frac{p^3}{1+ap}\right) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at}) \quad 25$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 آب 2024
دمشق - سورية

العلاقة بين تحويل هانكل وتحويل الزاكي:

تحويل هانكل (HT) للدالة $f(r)$ الذي يرمز له بالرمز $\{f(r)\}$ يُعرّف بالشكل:

$$F_v(s) = H_v\{f(r)\} = \int_0^{\infty} r J_v(rs) f(r) dr ; v \geq -\frac{1}{2} \quad 26$$

عندئذ العلاقة بين تحويل هانكل وتحويل الزاكي يمكن أن تعطى بالشكل التالي:

$$a \int_0^{\infty} r J_v(rs) e^{-\frac{r}{a}} f(r) dr = E\{r J_v(rs) f(r)\} = T(s) \quad 27$$

مثال 2:

$$H_v\{ar^v e^{-\frac{r}{a}}\} = a \int_0^{\infty} r J_v(rs) r^v e^{-\frac{r}{a}} dr = E\{r^{v+1} J_v(rs)\} = a \int_0^{\infty} r^{v+1} J_v(rs) e^{-\frac{r}{a}} dr \quad 28$$

بتعويض Eq. 2 في Eq. 28 وباستخدام المعادلة Eq. 22، عندئذ:

$$\begin{aligned} H_v\{ar^v e^{-\frac{r}{a}}\} &= a \int_0^{\infty} r^{v+1} e^{-\frac{r}{a}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{rs}{2}\right)^{2m+v}}{m! \Gamma(m+v+1)} dr = \\ &= a \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{s}{2}\right)^{2m+v}}{m! \Gamma(m+v+1)} \int_0^{\infty} r^{2v+2m+1} e^{-\frac{r}{a}} dr \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{s}{2}\right)^{2m+v}}{m! \Gamma(m+v+1)} E\{r^{2v+2m+1}\} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{s}{2}\right)^{2m+v}}{m! \Gamma(m+v+1)} \Gamma(2v+2m+2) a^{2v+2m+3} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{s}{2}\right)^{2m+v}}{m! \Gamma(m+v+1)} \Gamma(2(v+m+1)) a^{2v+2m+3} \end{aligned}$$

من Eq. 10، عندئذ:

$$\sqrt{\pi} \Gamma(2(v+m+1)) = 2^{2(v+m+1)-1} \Gamma(v+m+1) \Gamma\left(v+m+1+\frac{1}{2}\right)$$

$$\Gamma(2(v+m+1)) = \frac{2^{2v+2m+1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(v+m+1) \Gamma\left(v+m+\frac{3}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} H_v\{ar^v e^{-\frac{r}{a}}\} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{s}{2}\right)^{2m+v}}{m! \Gamma(m+v+1)} a^{2v+2m+3} \left(\frac{2^{2v+2m+1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma(v+m+1) \Gamma\left(v+m+\frac{3}{2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} s^v 2^{v+1} a^{2v+3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} (as)^{2m} \Gamma\left(v+m+\frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

من Eq. 9، عندئذ:

$$\left(v+\frac{3}{2}\right)_m = \frac{\Gamma\left(v+m+\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(v+\frac{3}{2}\right)} \Rightarrow$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} s^v 2^{v+1} a^{2v+3} \Gamma\left(v + \frac{3}{2}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-a^2 s^2)^m}{m!} \left(v + \frac{3}{2}\right)_m = \frac{1}{\sqrt{\pi}} s^v 2^{v+1} a^{2v+3} \Gamma\left(v + \frac{3}{2}\right) (1 + a^2 s^2)^{-(v+\frac{3}{2})}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} s^v 2^{v+1} a^{2v+3} \Gamma\left(v + \frac{3}{2}\right) (1 + a^2 s^2)^{-(v+\frac{3}{2})} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} s^v 2^{v+1} a^{2v+3} \Gamma\left(v + \frac{3}{2}\right) \frac{1}{(1+a^2 s^2)^{(v+\frac{3}{2})}}$$

النتائج والمناقشة:

تعريف 7: لتكن $f(r,t)$ معرفة، مستمرة قطعياً، وقابلة للمكاملة على $[0, \infty[\times [0, a]$ ، عندئذ تحويل هانكل المنتهي من الرتبة v -الزاكي المشترك (FHET) الذي يرمز له بالرمز $\widehat{F}(k_i, p) = FH_v E\{f(r,t)\}$ يمكن تعريفه بالشكل:

$$\widehat{F}(k_i, p) = FH_v E\{f(r,t)\} = p \int_0^{\infty} \int_0^a f(r,t) r J_v(rk_i) e^{-\frac{t}{p}} dr dt ; v > -\frac{1}{2} \quad 29$$

علماء أن هذه التكاملات موجودة. حيث $r J_v(rk_i) e^{-\frac{t}{p}}$ نواة تحويل هانكل المنتهي - الزاكي المشترك حيث $r \geq 0$ و $J_v(rk_i)$ دالة بيسل من النوع الأول والترتيب v .

ملاحظة 2: إذا كانت $v = 0$ عندئذ $FH_0 E\{f(r,t)\}$ يسمى تحويل هانكل المنتهي من الرتبة الصفرية-الزاكي المشترك.

تعريف 8: التحويل العكسي لتحويل هانكل المنتهي من الرتبة v -الزاكي المشترك (IFHET) الذي يرمز له بالرمز $\widehat{F}(k_i, p)$ يمكن تعريفه بالشكل:

$$f(r,t) = \frac{2}{a^2} \sum_{i=1}^{\infty} E^{-1} \left(\widehat{F}(k_i, p) \right) \frac{J_v(rk_i)}{(J_{v+1}(ak_i))^2} \quad 30$$

حيث الجمع يؤخذ على جميع الجذور الموجبة للمعادلة $J_v(ak_i) = 0$ والتحويل العكسي لتحويل هانكل المنتهي من الرتبة v -الزاكي المشترك يمكن تعريفه بالشكل:

$$f(r,t) = \sum_{i=1}^{\infty} E^{-1} \left(\widehat{F}(k_i, p) \right) \frac{2k_i^2}{(h^2 + k_i^2)a^2 - v^2} \frac{J_v(rk_i)}{(J_v(ak_i))^2} \quad 31$$

حيث k_i الجذور الموجبة للمعادلة $h J_v(ak_i) + k_i J'_v(ak_i) = 0$ **خصائص FHET:** سنثبت واحدة من أهم خواص FHET التي تسمى خاصة مؤثر بيسل التفاضلي.

لتكن $\widehat{F}(k_i, p) = FH_v E\{f(r,t)\}$ عندئذ:

$$FH_v E \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} f(r,t) \right) - \frac{v^2}{r^2} f(r,t) \right\} = p \int_0^a \int_0^{\infty} r \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} f(r,t) \right) - \frac{v^2}{r^2} f(r,t) \right) J_v(rk_i) e^{-\frac{t}{p}} dr dt$$

$$= p \int_0^a \int_0^{\infty} \left(\frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} f(r,t) \right) \right) J_v(rk_i) e^{-\frac{t}{p}} dr dt - p \int_0^a \int_0^{\infty} \left(\frac{v^2}{r} f(r,t) \right) J_v(rk_i) e^{-\frac{t}{p}} dr dt \quad 32$$

بفرض



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$I = \int_0^a \left(\frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} f(r,t) \right) \right) J_v(rk_i) dr$$

بالمكاملة بالتجزئة:

$$u = J_v(rk_i) \Rightarrow du = k_i J'_v(rk_i) dr$$

$$dv = \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} f(r,t) \right) dr \Rightarrow v = r \frac{d}{dr} f(r,t)$$

عندئذ:

$$I = r \frac{d}{dr} f(r,t) J_v(rk_i) \Big|_0^a - \underbrace{k_i \int_0^a r \frac{d}{dr} f(r,t) J'_v(rk_i) dr}_{I_1}$$

بالمكاملة بالتجزئة مرة ثانية لـ I_1 :

$$u = r J'_v(rk_i) \Rightarrow du = J'_v(rk_i) + r k_i J''_v(rk_i)$$

$$dv = \frac{d}{dr} f(r,t) dr \Rightarrow v = f(r,t)$$

عندئذ:

$$I_1 = -k_i r f(r,t) J'_v(rk_i) \Big|_0^a + k_i \int_0^a (f(r,t) J'_v(rk_i) + r k_i f(r,t) J''_v(rk_i)) dr \Rightarrow$$

$$I = r \frac{d}{dr} f(r,t) J_v(rk_i) \Big|_0^a - k_i r f(r,t) J'_v(rk_i) \Big|_0^a + k_i \int_0^a (f(r,t) J'_v(rk_i) + r k_i f(r,t) J''_v(rk_i)) dr$$

بالتعويض في Eq. 32 يصبح:

$$\begin{aligned} FH_v E \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} f(r,t) \right) - \frac{v^2}{r^2} f(r,t) \right\} &= p \int_0^\infty \left(r f'(r,t) J_v(rk_i) \Big|_0^a - \right. \\ &k_i r f(r,t) J'_v(rk_i) \Big|_0^a \Big) e^{-\frac{t}{p}} dt \\ &+ p \int_0^\infty \left(\int_0^a \left(k_i f(r,t) J'_v(rk_i) + r k_i^2 f(r,t) J''_v(rk_i) - \frac{v^2}{r} f(r,t) J_v(rk_i) \right) dr \right) e^{-\frac{t}{p}} dt \\ &= p \int_0^\infty \left(a f'(a,t) J_v(ak_i) - a k_i f(a,t) J'_v(ak_i) \right) e^{-\frac{t}{p}} dt + p \int_0^\infty \left(\frac{1}{r} \int_0^a \left((rk_i)^2 J''_v(rk_i) + \right. \right. \\ &\left. \left. (rk_i) J'_v(rk_i) - v^2 J_v(rk_i) \right) f(r,t) dr \right) e^{-\frac{t}{p}} dt \end{aligned} \quad 33$$

من Eq. 1، عندئذ:



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$(rk_i)^2 J''_v(rk_i) + (rk_i) J'_v(rk_i) + ((rk_i)^2 - v^2) J_v(rk_i) = 0 \Rightarrow$$

$$(rk_i)^2 J''_v(rk_i) + (rk_i) J'_v(rk_i) - v^2 J_v(rk_i) = -(rk_i)^2 J_v(rk_i)$$

بالتعويض في Eq. 33 يصبح:

$$= p \int_0^\infty (af'(a,t) J_v(ak_i) - ak_i f(a,t) J'_v(ak_i)) e^{-\frac{t}{p}} dt -$$

$$p \int_0^\infty \left(\frac{1}{r} \int_0^a (rk_i)^2 J_v(rk_i) f(r,t) dr \right) e^{-\frac{t}{p}} dt$$

$$= p \int_0^\infty (af'(a,t) J_v(ak_i) - ak_i f(a,t) J'_v(ak_i)) e^{-\frac{t}{p}} dt -$$

$$p \int_0^\infty (k_i^2 \int_0^a r J_v(rk_i) f(r,t) dr) e^{-\frac{t}{p}} dt$$

$$= p \int_0^\infty (af'(a,t) J_v(ak_i) - ak_i f(a,t) J'_v(ak_i)) e^{-\frac{t}{p}} dt - k_i^2 \hat{F}(k_i, p) \quad 34$$

لنناقش الحالات التالية:

1- إذا كانت k_i الجذور الموجبة للمعادلة $J_v(ak_i) = 0$ وبفرض $f(a,t) = A$ ثابت وتطبيق العلاقة 23، عندئذ تصبح Eq. 34

$$FH_v E \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} f(r,t) \right) - \frac{v^2}{r^2} f(r,t) \right\} = -aAp^2 k_i J'_v(ak_i) - k_i^2 \hat{F}(k_i, p)$$

من العلاقة 5 عندئذ:

$$J'_v(ak_i) = \frac{v}{ak_i} J_v(ak_i) - J_{v+1}(ak_i)$$

$$J_v(ak_i) = 0 \Rightarrow J'_v(ak_i) = -J_{v+1}(ak_i) \Rightarrow$$

$$FH_v E \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} f(r,t) \right) - \frac{v^2}{r^2} f(r,t) \right\} = aAp^2 k_i J_{v+1}(ak_i) - k_i^2 \hat{F}(k_i, p) \quad 35$$

2- إذا كانت k_i الجذور الموجبة للمعادلة $k_i J'_v(ak_i) = -h J_v(ak_i) + k_i J'_v(ak_i) = 0$ عندئذ $h J_v(ak_i) = -k_i J'_v(ak_i)$ وبفرض

$$Eq. 34 \text{ يصبح } f'(a,t) + hf(a,t) = B$$

$$FH_v E \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} f(r,t) \right) - \frac{v^2}{r^2} f(r,t) \right\} = \int_0^\infty (af'(a,t) + hf(a,t)) J_v(ak_i) -$$

$$k_i^2 \hat{F}(k_i, t) e^{-\frac{t}{p}} dt$$

$$= ap^2 B J_v(ak_i) - k_i^2 \hat{F}(k_i, p) \quad 36$$

خوارزمية لإيجاد الحل العام (خطوات الحل):



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

1- نطبق $\hat{F}(k_i, p) = FH_v E\{f(r, t)\}$ على كلا جانبي المعادلة المعطاة.

2- نطبق الخاصة:

$$FH_v E\left\{\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} f(r, t)\right) - \frac{v^2}{r^2} f(r, t)\right\}$$

نعوض الشرط الحدي المناسب إما ديرخلية أو روبين.3-

نطبق الخاصة:4-

$$E\left(\frac{df(x, t)}{dt}\right) = \frac{1}{p} T(x, p) - pf(x, 0)$$

بتعويض الشرط الابتدائي ينتج معادلة جبرية.5-

6- بأخذ التحويل العكسي $FH_v E^{-1}\{\hat{F}(k_i, p)\} = f(r, t)$ المناسب إما Eq. 30 أو Eq. 31 فنحصل على الحل العام.

تطبيق على FHET:

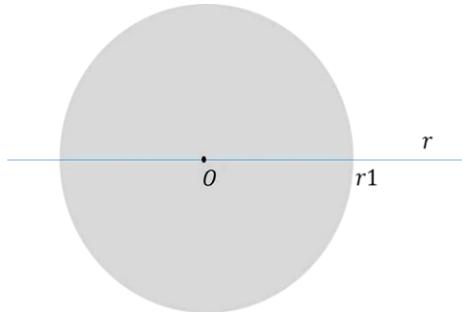
سيتم تطبيق تحويل هانكل المنتهي من الرتبة الصفرية - الزاكي المشترك على المسألة التالية:

مسألة هوت دوغ

لتكن لدينا معادلة الحرارة

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u(r, t)}{\partial r}\right) = \frac{1}{a} \frac{\partial u(r, t)}{\partial t} \quad 37$$

حيث $0 \leq r < r_1$ الشكل 1 و α ثابت انتشار الحرارة





المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

الشكل 1: يعبر عن مجال الدراسة

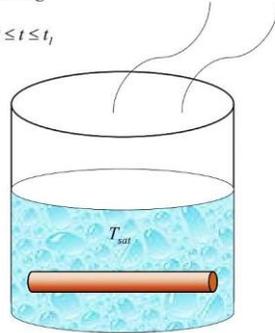
لندرس مسألة هوت دوغ (النقائق) بالشكل التالي:
ليكن لدينا وسط محيط (السائل) وجسم (هوت دوغ) ومصدر خارجي للتسخين.

المرحلة الأولى: (مرحلة طهي هوت دوغ) (*Boiling*):

يبدأ تسخين السائل بدرجة حرارة بدائية T_0 مستمداً الحرارة من المصدر الخارجي، ويستمر تسخين السائل إلى أن يصل لدرجة حرارة مشبعة T_{sat} أو يمكن القول أن $T_{sat} = T_{max}$ أي درجة الحرارة القصوى التي يصل لها الوسط (السائل)، بعد وصول السائل إلى T_{sat} ، نضع الجسم (هوت دوغ) داخل السائل المغلي مع استمرار وجود المصدر الخارجي للتسخين الشكل 2، بداية تكون درجة حرارة الهوت دوغ T_0 ، تبدأ T_0 بالتغير من خلال اكتساب الحرارة من السائل المغلي (درجة الحرارة المحيطة به) الشكل 3، يتم عملية تبادل حراري بين السائل الهوت دوغ عن طريق المعادلة Eq. 37 التي تصف انتقال الحرارة خلال الزمن $0 \leq t \leq t_1$ ، حيث عملية التبادل الحراري تتم من الوسط الساخن للجسم البارد (من الأعلى للأدنى) إلى أن نصل لتوازن حراري بين السائل وهوت دوغ أي إلى أن تصبح درجة الحرارة متساوية بين الوسط والجسم وهي درجة حرارة الإشباع T_{sat} (أي أنه تمّ طهي هوت دوغ) وذلك في اللحظة $t = t_1$ الشكل 5 وهذا الزمن يعتبر الوقت اللازم لطهي هوت دوغ بالكامل حتى لا يحترق.

I Boiling

$$0 \leq t \leq t_1$$

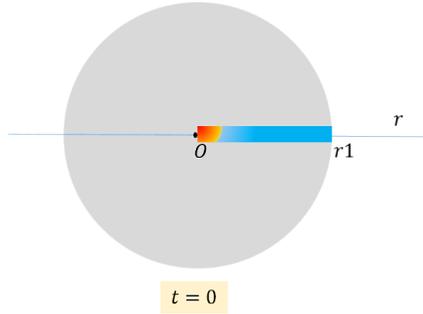


الشكل 2: يمثل الوسط الذي يتم فيه طهي هوت دوغ خلال الزمن $0 \leq t \leq t_1$

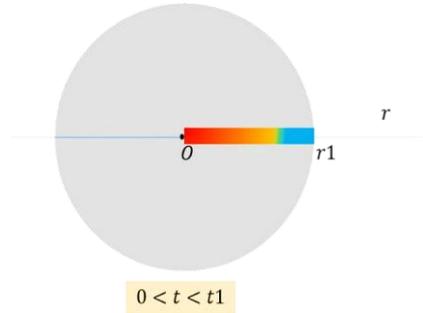
رسم توضيحي للمجال الزمن لارتفاع الحرارة خلال الزمن $0 \leq t \leq t_1$



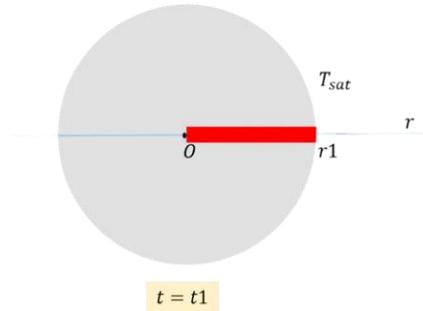
المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 آب 2024
دمشق - سورية



الشكل 3: بداية التسخين في اللحظة $t = 0$



الشكل 4: خلال الزمن $0 < t < t_1$ زادت درجة الحرارة





المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

الشكل 5: خلال الزمن $t = t_1$ وصلت درجة الحرارة لدرجة الإشباع T_{sat} (الغليان)

هذه المرحلة تحقق الشروط التالية:

- الشرط الابتدائي الأول:

$$u^l(r, 0) = u_0(r) = T_0 \quad 38$$

حيث درجة الحرارة الابتدائية T_0 للمحيط والجسم

- الشرط الحدي الأول (ديرخلية)

$$u(r_1, t) = u(r_1) = T_{sat} \quad 39$$

حيث T_{sat} درجة الحرارة المشبعة

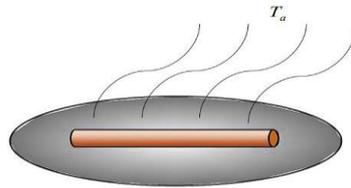
المرحلة الثانية: مرحلة إخراج هوت دوغ من الماء المغلي (Cooling):

عند إخراج هوت دوغ من الوسط الأول (الماء) إلى وسط آخر (الغرفة مثلاً) الشكل 6، تكون درجة الحرارة البدائية T_{t_1} في هذه المرحلة هي نفس درجة الحرارة النهائية في مرحلة الغليان، أي يبدأ التبريد في اللحظة $t = t_1$ الشكل 7، تتم عملية تبادل حراري بين الوسط (الغرفة) والهوت دوغ عن طريق Eq. 37 التي تصف انتقال الحرارة خلال الزمن $t > t_1$ (من الأعلى "الجسم" للأدنى "الوسط المحيط") إلى أن نصل إلى توازن حراري بين درجة الحرارة المحيطة T_a (الغرفة مثلاً) وهوت دوغ، أي إلى أن تصبح درجة الحرارة متساوية بين الوسط المحيط والجسم وهي درجة حرارة الوسط المحيط T_a (الغرفة مثلاً) أو يمكن القول أن $T_a = T_{min}$ أي أدنى درجة تبريد نحصل عليها (أي تم تبريد هوت دوغ) وذلك في اللحظة $t > t_1$ الشكل 8 أي بعد اللحظة t_1 تتم عملية تبريد هوت دوغ الشكل 9.

يمكن القول أن الوقت اللازم حتى يبرد هوت دوغ هو $t_1 < t \leq t_2$ حيث t_2 أدنى زمن تبريد لهوت دوغ، أي مهما زاد الزمن فلن تنخفض درجة الحرارة عن T_{min} .

II Cooling

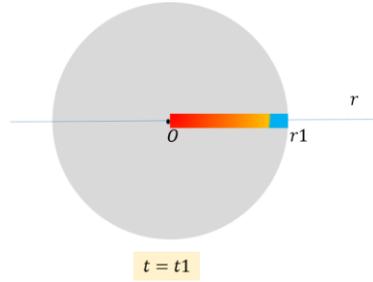
$$t > t_1$$



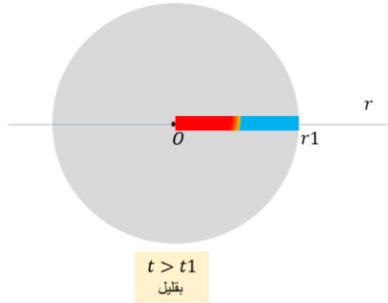
الشكل 6: يمثل الوسط الذي يتم فيه تبريد هوت دوغ خلال الزمن $t > t_1$
رسم توضيحي للمجال الزمن لانخفاض الحرارة خلال الزمن $t > t_1$



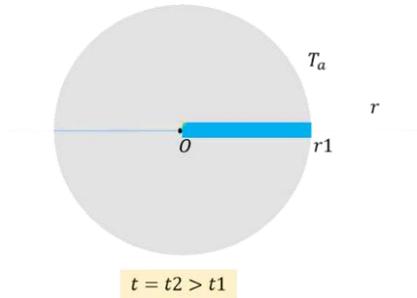
المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية



الشكل7: بداية التبريد في اللحظة $t = t_1$



الشكل8: عندما تكون t أطول قليلاً من t_1 تزداد البرودة



الشكل9: خلال الزمن $t = t_2 > t_1$ وصلت درجة البرودة لدرجة التوازن مع الوسط T_a
هذه المرحلة تعطي بالشروط التالية:



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

- الشرط الابتدائي الثاني:

$$u^H(r, 0) = u^H_0(r) = u^l(r, t_1) = u_{t_1}(r) = T_{t_1} \quad 40$$

حيث T_{t_1} درجة حرارة ابتدائية

- الشرط الحدي الثاني (روبين)

$$\frac{\partial u(r)}{\partial r} + hu(r) \Big|_{r=r_1} = hT_a \quad 41$$

حيث T_a درجة الحرارة المحيطة

الحل:

من Eq. 29 سيتم تعريف تحويل هانكل المنتهي من الرتبة الصفرية - الزاكي المشترك لهذه المسألة بالشكل:

$$\hat{u}(k_i, p) = p \int_0^\infty \int_0^{r_1} u(r, t) r J_0(k_i r) e^{-\frac{t}{p}} dr dt \quad 42$$

1. لتوجد الحل العام للمرحلة الأولى (الغليان):

بتطبيق Eq. 42 على Eq. 37، نجد:

$$\alpha p \int_0^\infty e^{-\frac{t}{p}} \int_0^{r_1} r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right) J_0(k_i r) dr dt = p \int_0^\infty e^{-\frac{t}{p}} \int_0^{r_1} r \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) J_0(k_i r) dr dt$$

بتطبيق الخاصة 35 على الطرف الأول مع الشرط الحدي 39 حيث k_i الجذور الموجبة للمعادلة $J_0(r_1 k_i) = 0$ ، عندئذ:

$$p^2 \alpha r_1 k_i T_{sat} J_1(r_1 k_i) - \alpha k_i^2 \hat{u}(k_i, p) = p \int_0^\infty e^{-\frac{t}{p}} \tilde{u}_t(k_i, t) dt$$

حيث $J'_0(r_1 k_i) = -J_1(r_1 k_i)$

بتطبيق الخاصة 21 على الطرف الثاني، نجد:

$$p^2 \alpha r_1 k_i T_{sat} J_1(r_1 k_i) - \alpha k_i^2 \hat{u}(k_i, p) = \frac{1}{p} \hat{u}(k_i, p) - p \tilde{u}(k_i, 0) \quad 43$$

بتطبيق تحويل هانكل المنتهي من الرتبة الصفرية على الشرط الابتدائي 38، نجد:

$$\tilde{u}(k_i, 0) = u_0(k_i) = T_0 \int_0^{r_1} r J_0(r k_i) dr = \frac{T_0}{k_i} r_1 J_1(r_1 k_i)$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

بالتعويض في Eq. 43 ، نجد:

$$p^2 ar_1 k_i T_{sat} J_1(r_1 k_i) - \alpha k_i^2 \hat{u}(k_i, p) = \frac{1}{p} \hat{u}(k_i, p) - p \frac{T_0}{k_i} r_1 J_1(r_1 k_i) \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1 + \alpha k_i^2 p}{p} \right) \hat{u}(k_i, p) = p^2 ar_1 k_i T_{sat} J_1(r_1 k_i) + p \frac{T_0}{k_i} r_1 J_1(r_1 k_i) \Rightarrow$$

$$\hat{u}(k_i, p) = \frac{p^3}{1 + \alpha k_i^2 p} ar_1 k_i T_{sat} J_1(r_1 k_i) + \frac{p^2 T_0}{1 + \alpha k_i^2 p} r_1 J_1(r_1 k_i) \quad 44$$

وهذه المعادلة عبارة عن معادلة جبرية.

بتطبيق الخاصة Eq. 30 على Eq. 44 حيث k_i الجذور الموجبة للمعادلة $J_0(r_1 k_i) = 0$ ، عندئذ:

$$u(r, t) = \frac{2}{r_1^2} \sum_{i=1}^{\infty} \left(E^{-1} \left(\frac{p^3}{1 + \alpha p k_i^2} \right) ar_1 k_i T_{sat} J_1(r_1 k_i) + \right. \\ \left. E^{-1} \left(\frac{p^2}{1 + \alpha p k_i^2} \right) \frac{T_0}{k_i} r_1 J_1(r_1 k_i) \right) \frac{J_0(r k_i)}{(J_1(r_1 k_i))^2} \quad 45$$

بتطبيق العلاقة 24 و 25 على Eq. 45 ، نجد:

$$u(r, t) = \frac{2}{r_1^2} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha k_i^2} (1 - e^{-\alpha k_i^2 t}) ar_1 k_i T_{sat} J_1(r_1 k_i) + \right. \\ \left. e^{-\alpha k_i^2 t} \frac{T_0}{k_i} r_1 J_1(r_1 k_i) \right) \frac{J_0(r k_i)}{(J_1(r_1 k_i))^2}$$

$$u(r, t) = \frac{2}{r_1} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{T_0}{k_i} e^{-\alpha k_i^2 t} + \frac{T_{sat}}{k_i} (1 - e^{-\alpha k_i^2 t}) \right) \frac{J_0(r k_i)}{J_1(r_1 k_i)} \quad 46$$

وهو الحل العام للمرحلة الأولى حيث $0 \leq t \leq t_1$.

الحل العام عبارة عن جزأين: الجزء الأول يتعلق ببداية مرحلة التسخين عندما كانت درجة الحرارة T_0 كحد مضروب بالتابع الأسّي الذي يصف التغير مع الزمن والجزء الثاني يعبر عن المرحلة النهائية التي نصل فيها إلى درجة حرارة T_{sat} .

لنوجد الحل العام للمرحلة الثانية (التبريد): 2.

بتطبيق Eq. 42 على Eq. 37 ، نجد:



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$\alpha p \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{p}} \int_0^{r_1} r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right) J_0(k_i r) dr dt = p \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{p}} \int_0^{r_1} r \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) J_0(k_i r) dr dt$$

بتطبيق الخاصة 36 على الطرف الأول مع الشرط الحدي 41 حيث k_i الجذور الموجبة للمعادلة $hJ_0(r_1 k_i) + k_i J_0'(r_1 k_i) = 0$ عندئذ:

$$p^2 \alpha r_1 h T_{\alpha} J_0(r_1 k_i) - \alpha k_i^2 \hat{u}(k_i, p) = p \int_0^{\infty} e^{-\frac{t}{p}} \tilde{u}_t(k_i, t) dt$$

بتطبيق الخاصة 21 على الطرف الثاني، نجد:

$$p^2 \alpha r_1 h T_{\alpha} J_0(r_1 k_i) - \alpha k_i^2 \hat{u}(k_i, p) = \frac{1}{p} \hat{u}(k_i, p) - p \tilde{u}(k_i, t_1) \Rightarrow$$

$$\left(\frac{1 + \alpha k_i^2 p}{p} \right) \hat{u}(k_i, p) = p^2 \alpha r_1 h T_{\alpha} J_0(r_1 k_i) + p \tilde{u}(k_i, t_1) \quad 47$$

بتطبيق تحويل هانكل المنتهي من الرتبة الصفرية على الشرط الابتدائي 40، نجد:

$$\tilde{u}(k_i, t_1) = \frac{T_{t_1}}{k_i} r_1 J_1(r_1 k_i)$$

بالتعويض في Eq. 47، نجد

$$\hat{u}(k_i, p) = \frac{p^3}{1 + \alpha k_i^2 p} \alpha r_1 h T_{\alpha} J_0(r_1 k_i) + \frac{p^2 T_{t_1}}{1 + \alpha k_i^2 p} \frac{r_1 J_1(r_1 k_i)}{k_i} \quad 48$$

وهذه المعادلة عبارة عن معادلة جبرية.

بتطبيق الخاصة 31 Eq. على Eq. 48 حيث k_i الجذور الموجبة للمعادلة $hJ_0(r_1 k_i) + k_i J_0'(r_1 k_i) = 0$ عندئذ:

$$u(r, t) = \frac{2}{r_1^2} \sum_{i=1}^{\infty} \left(E^{-1} \left(\frac{p^3}{1 + \alpha k_i^2 p} \right) \alpha r_1 h T_{\alpha} J_0(r_1 k_i) + E^{-1} \left(\frac{p^2}{1 + \alpha k_i^2 p} \right) \frac{T_{t_1}}{k_i} r_1 J_1(r_1 k_i) \right) \times \frac{k_i^2}{(h^2 + k_i^2)} \frac{J_0(r k_i)}{(J_0(r_1 k_i))^2} \quad 49$$

بتطبيق العلاقة 24 و 25 على Eq. 49، نجد:

$$u(r, t) = \frac{2}{r_1^2} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha k_i^2} (1 - e^{-\alpha k_i^2 t}) \alpha r_1 h T_{\alpha} J_0(r_1 k_i) + e^{-\alpha k_i^2 t} \frac{T_{t_1}}{k_i} r_1 J_1(r_1 k_i) \right) \frac{k_i^2}{(h^2 + k_i^2)} \frac{J_0(r k_i)}{(J_0(r_1 k_i))^2}$$

$$u(r, t) = \frac{2}{r_1^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{h^2 + k_i^2} \left(T_{t_1} k_i J_1(r_1 k_i) e^{-\alpha k_i^2 t} + h T_{\alpha} J_0(r_1 k_i) (1 - e^{-\alpha k_i^2 t}) \right) \frac{J_0(r k_i)}{(J_0(r_1 k_i))^2} \quad 50$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

وهو الحل العام للمرحلة الثانية حيث $t > t_1$.

الحل العام عبارة عن جزأين: الجزء الأول يتعلق ببداية مرحلة التبريد عندما كانت درجة الحرارة T_{t_1} كحد مضروب بالتابع الأسّي الذي يصف التغير مع الزمن والجزء الثاني يعبر عن المرحلة النهائية التي نصل فيها إلى درجة حرارة T_a .

دراسة الحالة المستقرة:

• دراسة الحالة المستقرة للمرحلة الأولى للحل العام لـ Eq. 46:

$$u(r, t) = \frac{2}{r_1} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{T_0}{k_i} e^{-\alpha k_i^2 t} + \frac{T_{sat}}{k_i} (1 - e^{-\alpha k_i^2 t}) \right) \frac{J_0(r k_i)}{J_1(r_1 k_i)}$$

يمكن اعتبار الحرارة $u(r, t)$ كمجموع جزأين:

$$u(r, t) = \text{الحالة العابرة} + \text{الحالة المستقرة}$$

حيث أنّ الحالة العابرة (متغيرة مع الزمن t) والحالة المستقرة (ثابتة مع الزمن t)

الحالة المستقرة: تتمثل عندما $t \rightarrow \infty$ وبالتالي التابع الأسّي يتحلل (يتلاشى) إلى الصفر ويبقى لدينا الحالة المستقرة أي التي لا تعتمد على الزمن t ومنه يصبح الحل العام Eq. 46 عندما $t \rightarrow \infty$ بالشكل:

$$u(r, t) = \frac{2T_{sat}}{r_1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k_i} \frac{J_0(r k_i)}{J_1(r_1 k_i)} \quad 51$$

من المثال 1، بأخذ $v = 0$ ، نجد:

$$H_0\{1\} = \int_0^{r_1} r J_0(r k_i) dr = \frac{1}{k_i} \int_0^{r_1} \frac{d}{dr} r J_1(r k_i) dr = \frac{r_1}{k_i} J_1(r_1 k_i)$$

من Eq. 12 حيث $v = 0$ نجد:

$$1 = \frac{2}{r_1^2} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{r_1}{k_i} J_1(r_1 k_i) \frac{J_0(r k_i)}{(J_1(r_1 k_i))^2} = \frac{2}{r_1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k_i} \frac{J_0(r k_i)}{J_1(r_1 k_i)}$$

حيث k_i الجذور الموجبة للمعادلة $J_1(r_1 k_i) = 0$

وبالتعويض في Eq. 51، نجد:

$$u(r, t) = \frac{2T_{sat}}{r_1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k_i} \frac{J_0(r k_i)}{J_1(r_1 k_i)} = T_{sat} \quad 52$$

فيزيائياً: يمثل درجة الحرارة المشبعة.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 آب 2024
دمشق - سورية

• دراسة الحالة المستقرة للمرحلة الثانية للحل العام لـ Eq. 50:

$$u(r, t) = \frac{2}{r_1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{h^2 + k_i^2} \left(T_{t_1} k_i J_1(r_1 k_i) e^{-\alpha k_i^2 t} + h T_a J_0(r_1 k_i) \left(1 - e^{-\alpha k_i^2 t} \right) \right) \frac{J_0(r k_i)}{(J_0(r_1 k_i))^2}$$

يمكن اعتبار الحرارة $u(r, t)$ كمجموع جزأين:

$$u(r, t) = \text{الحالة العابرة} + \text{الحالة المستقرة}$$

حيث أن الحالة العابرة (متغيرة مع الزمن t) والحالة المستقرة (ثابتة مع الزمن t)

الحالة المستقرة تتمثل عندما $t \rightarrow \infty$ وبالتالي التابع الأسّي يتحلل (يتلاشى) إلى الصفر ويبقى لدينا الحالة المستقرة أي التي لا تعتمد على الزمن t ومنه يصبح الحل العام Eq. 50 عندما $t \rightarrow \infty$ بالشكل:

$$u(r, t) = \frac{2hT_a}{r_1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{h^2 + k_i^2} J_0(r_1 k_i) \frac{J_0(r k_i)}{(J_0(r_1 k_i))^2}$$

$$u(r, t) = \frac{2hT_a}{r_1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{h^2 + k_i^2} \frac{J_0(r k_i)}{J_0(r_1 k_i)} \quad 53$$

من المثال 1، بأخذ $v = 0$ ، نجد:

$$H_0\{1\} = \frac{r_1}{k_i} J_1(r_1 k_i)$$

من Eq. 18 حيث $v = 0$ نجد:

$$1 = \frac{2}{r_1^2} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{r_1}{k_i} J_1(r_1 k_i) \right) \frac{k_i^2}{h^2 + k_i^2} \frac{J_0(r k_i)}{(J_0(r_1 k_i))^2}$$

$$1 = \frac{2}{r_1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{h^2 + k_i^2} k_i J_1(r_1 k_i) \frac{J_0(r k_i)}{(J_0(r_1 k_i))^2} \quad 54$$

حيث k_i الجذور الموجبة للمعادلة $hJ_0(r_1 k_i) + k_i J_1(r_1 k_i) = 0$

إن $J_0'(r_1 k_i) = -J_1(r_1 k_i)$ وبالتعويض في الشرط الحدي، نجد:

$$hJ_0(r_1 k_i) = k_i J_1(r_1 k_i)$$

بالتعويض في Eq. 54

$$1 = \frac{2}{r_1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{h}{h^2 + k_i^2} J_0(r_1 k_i) \frac{J_0(r k_i)}{(J_0(r_1 k_i))^2}$$

$$1 = \frac{2h}{r_1} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{h^2 + k_i^2} \frac{J_0(r k_i)}{J_0(r_1 k_i)} \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{h^2 + k_i^2} \frac{J_0(r k_i)}{J_0(r_1 k_i)} = \frac{r_1}{2h}$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

وبالتعويض في Eq. 53، نجد:

$$u(r, t) = \frac{2hT_a}{r_1} \left(\frac{r_1}{2h} \right) = T_a$$

55

فيزيائياً: تمثل درجة حرارة الوسط (الجو المحيط).

مناقشة: ما يمثل المحيط الذي يتم فيه طهي النقانق بمرور الوقت $0 \leq t \leq t_1$

بدأ تسخين السائل في اللحظة $t = 0$ مستمداً الحرارة من المصدر الخارجي (الغاز مثلاً) مع مرور الزمن مثلاً في اللحظة $t = 3$ تكون قد ازدادت حرارة السائل، أيضاً بمرور الزمن أكثر مثلاً في اللحظة $t = 7$ تكون قد ازدادت حرارة السائل أكثر فأكثر، في اللحظة $t_1 = 10$ يصل الماء لدرجة الإشباع (الغليان)، نضع بعد ذلك هوت دوغ في الماء المغلي مع استمرار وجود المصدر الخارجي لمدة عشر دقائق بذلك يكون قد تم توازن حراري بين الماء وهوت دوغ ويكون قد تمّ طهي هوت دوغ.

رسم درجة حرارة النقطة المركزية:

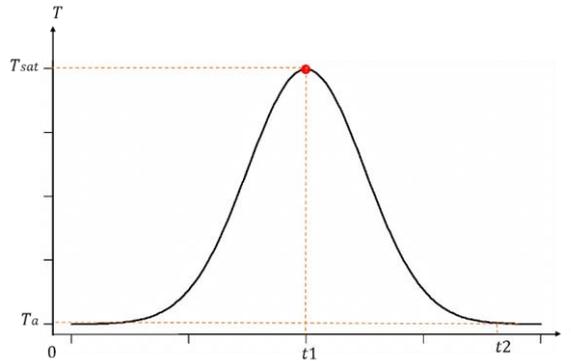
النقطة المركزية تأخذ قيمتين T_a و T_{sat}

T_{sat} يمثل نهاية المرحلة الأولى (مرحلة الغليان).

T_a يمثل بداية المرحلة الثانية (مرحلة التبريد).

بدايةً بالطور الأول عند عملية التسخين كانت درجة الحرارة البدائية T_0 ، بدأت بالارتفاع تدريجياً حتى وصلت لدرجة حرارة الإشباع (الذروة) T_{sat} وذلك بعد زمن معين وليكن t_1 وذلك نتيجة لتبادل الحراري الشكل 10.

ثمّ بالطور الثاني عند عملية التبريد تبدأ النقطة المركزية بالانخفاض تدريجياً حتى تصل لـ T_a بعد زمن معين وليكن t_2 وذلك أيضاً نتيجة التبادل الحراري الشكل 10.



الشكل 10: يمثل درجة حرارة النقطة المركزية، تأخذ قيمتين T_a و T_{sat}



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

استنتاج:

في هذا البحث، تم الجمع بين تحويلين منفصلين مختلفين لتقديم تحويل مشترك جديد FHET وتحويله العكسي IFHET. كما أنه تم استنتاج وإثبات أهم خاصية لـ FHET، وهي خاصية تحويل هانكل المنتهي- الزاكي المشترك لمؤثر بييسل التفاضلي، وتم مناقشة هذه الخاصية لأجل شرطين حديين مختلفين هما ديرخليه وروبين، حيث تظهر أهمية هذه الخاصية من خلال حل معادلات تفاضلية جزئية ذات التماثل المحوري. أشارت نتائج دراسة FHET إلى أن FHET تعتبر تقنية قوية للتعامل مع المعادلات التفاضلية الجزئية ذات التماثل المحوري. بالإضافة إلى ذلك، فهي تقنية فعالة ودقيقة وسريعة لحل المعادلات التفاضلية الجزئية ذات التماثل المحوري وذلك من خلال تحويلها مباشرة إلى المعادلات الجبرية.

تعهد الباحثين:

- تضارب المصالح: لا يوجد.
- البحث المقدم هو عملي الأصلي.
- نؤكد بموجب هذا أن جميع الأشكال في البحث هي ملكنا.
- **مساهمة الباحثين:**
- ر.خ.ر. تم تصور الفكرة المقدمة باستخدام تقنية جديدة وهي الجمع بين تحويلين منفصلين مختلفين معاً لتقديم تحويل مشترك جديد FHET لحل المعادلات التفاضلية الجزئية المتمثلة المحور، وكتابة البحث.
- م.م.ع. تم الإشراف على العمل.

المراجع:

1. Debnath L, Bhatta D. Integral Transforms and Their Applications. 3rd ed. New York, USA: CRC Press; 2015. Chapter 13, Finite Hankel Transform; p. 501-511. <http://www.crcpress.com>.
2. Hasan SK, Sameer QH. On Comparison Study Between Double Sumudu and Elzaki Linear Transforms Method for Solving Fractional Partial Differential Equations. **Baghdad Sci J**. 2021 Feb 9; 18(3): 509-521. DOI: <http://dx.doi.org/10.21123/bsj.2021.18.3.0509>.
3. Elzaki TM. The New Integral Transform "Elzaki Transform". **Glob J Pure Appl Math**. ISSN 0973-1768, 2011; 7(1): 57-64. Available from: <http://www.ripublication.com/gjpam.htm>
4. Athraa NA, Yasmin AA. Using the Elzaki Transform to Solve Systems of Partial Differential Equations. **EJPCM**. ISSN: 2795-7667. 2022 Apr; 5:1-11.
5. Myasar OE, Luma NMT. New Approach for Solving Three Dimensional Space Partial Differential Equation. **Baghdad Sci J**. 2019 Sep 23; 16(3):786-792. DOI: [http://dx.doi.org/10.21123/bsj.2019.16.3\(Suppl.\).0786](http://dx.doi.org/10.21123/bsj.2019.16.3(Suppl.).0786).
6. Hassan M, Elzaki TM. Double Elzaki Transform Decomposition Method for Solving Non-Linear Partial Differential Equations. **J appl math phys**. 2020; 8(8): 1463-1471. DOI: <https://doi.org/10.4236/jamp.2020.88112>.
7. Ahmed SA, Elzaki TM, Hassan AA. Solution of Integral Differential Equations by New Double Integral Transform (Laplace-Sumudu Transform). **Abstr Appl Anal**. 2020; 2020: 7. <https://doi.org/10.1155/2020/4725150>.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

8. Ahmed SA, Elzaki TM, Elbadri M, Mohamed MZ. Solution of Partial Differential Equations by New Double Integral Transform (Laplace - Sumudu Transform). Ain Shams Eng J. 2021; 12(4): 4045–4049.
9. Elzaki TM, Ahmed SA, Areshi M, Chamekh M. Fractional Partial Differential Equations and Novel Double Integral Transform. J King Saud Univ Sci. 2022; 34(3): 101832.
10. Elzaki TM, Ishag AA. Solution of Telegraph Equation by Elzaki-Laplace Transform. AJET. 2022; 2(1): 1-7. DOI: <https://doi.org/10.47959/AJET.2021.1.1.8>
11. Elzaki TM, Alderremy AA. On the New Double Integral Transform for Solving Singular System of Hyperbolic Equations. J Nonlinear Sci Appl. 2018; 11(10): 1207–1214.
12. Osman WM, Elzaki TM, Siddig NAA. Modified Double Conformable Laplace Transform and Singular Fractional Pseudo-Hyperbolic and Pseudo-Parabolic Equations. J King Saud Univ Sci. 2021; 33: 101378.
13. Poularikas AD. Transforms and Applications Handbook. 3rd edition. New York, USA: CRC Press; 2010. Chapter 9, The Hankel Transform; p. 1–16. journal homepage: www.sciencedirect.com.
14. Mitra A. A Comparative Study of Elzaki and Laplace Transforms to Solve Ordinary Differential Equations of First and Second Order. (ICRFS 2021). 2021; 1913:1-9. DOI: <http://dx.doi.org/10.1088/1742-6596/1913/1/012147>.

Temporal Supra And Infra Topological Spaces

Riad K. Al-Hamido

Faculty of Science, AlFurat University, Deir-ez-Zor, Syrian Arab Republic. Cordoba private University, Alqamishli branch, Syrian Arab Republic. E-mail: riad-hamido1983@hotmail.com.

Abstract

In this new work, we study for the first time in the world the notion of temporal supra and infra topology and present several important characteristics. Also, we generalize the temporal topological space to temporal infra topological space and temporal supra topological space. Moreover, we prove some remarks, theorems on temporal supra and infra topology. In addition, we will present the basic definitions related to temporal supra



**المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 آب 2024
دمشق - سورية**

topological space and temporal infra topological space such as interior and closer in this new tow temporal topological spaces. This new spaces may have many more applications in the theoretical and applied science than classical topological space.

1.Introduction

A. Mhemdia et al. [1] defined a new class of topological space by using temporal topology, which named temporal topological spaces.

As a generalization of topological space, the supra topological space was introduced by A.S. Mashhour et al. [2]1983. For more information about supra topological space see [6-3]. Also, as another generalization of the topological space, Adel. M. AL-Odhari [7] defined infra topological space. The final space inspired researchers to work on generalizing it, as R.K.Al-Hamido [8] generalized it to the infra bi-topological space. But the important generalization is the one made by the researchers G. Jayaparthisarathy, et al. where they introduced the concept of neutrosophic supra topological space [9] in 2019, by using the neutrosophic sets.

In the first section of the paper, we mentioned some concepts about temporal topological space. Then, in the second chapter, we defined temporal infra topological space, and studied its basic properties, and defined new types of sets such that temporal infra open (closed) set and quasi temporal infra open (closed) set. We then examined the relationships between these sets. We also studied its basic characteristics.

In the third section we prepared temporal supra topological space, and studied its basic properties, and defined new types of sets such that temporal supra open (closed) set and quasi temporal supra open (closed) set. We then examined the relationships between these sets. We also studied its basic characteristics.

In the fourth section we defined new patterns of interior and closure in these two new spaces. We also studied their characteristics.

This new spaces (temporal supra topological spaces and temporal infra topological spaces) is likely to contribute to solving many theoretical and applied issues. For example, it may contribute to defining new types of open and closed sets, functions, new separation axioms, etc., in addition to developing the decision-making process and many applied matters. Others, such as developing the construction



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

A study in analysis matrices into the product of special matrices

Reem Nayef Al-Ahmad Prof. Dr. Abdulbasit Al-khatib Ass. Prof. Dr. Basel Al-arnous

Abstract

In this research, we conducted a study on matrices and matrix analysis and mentioned the basic definitions necessary for that . He talked about most of the scientists and researchers who studied matrices and matrix analysis, and we documented each researcher's method. We also mentioned the advantages and disadvantages of each method during the previous periods, and finally we compared QR analysis and LU analysis.

Key Words: Matrix - matrix analysis - QR analysis - LU analysis

دراسة في تحليل المصفوفات إلى جداء مصفوفات خاصة

ريم نايف الأحمد إد عبد الباسط الخطيب ا.م.د باسل العرنوس

الخلاصة

قمنا في هذا البحث بإجراء دراسة حول المصفوفات و عن تحليل المصفوفات وذكرنا التعاريف الأساسية اللازمة لذلك، و ذكر أغلب العلماء و الباحثين الذين قاموا بدراسة المصفوفات و تحليل المصفوفات و وثقنا طريقة كل باحث وذكرنا أيضاً ميزات و عيوب كل طريقة خلال الفترات السابقة و أخيراً قارنا بين تحليل QR و تحليل LU .

الكلمات المفتاحية: مصفوفة – تحليل المصفوفات – تحليل QR – تحليل LU.

مقدمة

إنّ رحلة تحليل المصفوفات عبر الزمن هي رحلة فكرية من الحضارات القديمة إلى العصر الحديث ، يُعدّ تحليل المصفوفات من فروع الرياضيات الهامة ، حيث يمتاز بتطبيقاته الواسعة في مجالات متعددة مثل الفيزياء والهندسة والعلوم الحاسوبية.

البدايات: تُشير الدلائل التاريخية إلى أنّ جذور تحليل المصفوفات تعود إلى حضارات عريقة مثل الصين ومصر و بابل. ففي القرن الثالث قبل الميلاد، برز اسم "سيكي تاكاكازو" كأحد أوائل علماء الرياضيات الذين اهتموا بدراسة المصفوفات، حيث قدم مساهمات هامة في حلّ أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات [14] .

العصور الوسطى: خلال العصور الوسطى، واصل علماء الرياضيات العرب والإسلاميون تطوير مفهوم المصفوفات. ففي القرن التاسع، برز اسم "الخوارزمي" كراند في الجبر، حيث قدّم مساهمات جوهرية في حلّ أنظمة المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات. كما ساهم "ابن الهيثم" في تطوير مفهوم المحددات، وهي أداة رياضية هامة في تحليل المصفوفات [14] .



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

القرن السابع عشر: مع حلول القرن السابع عشر، شهد تحليل المصفوفات نقلة نوعية بفضل مساهمات علماء الرياضيات الأوروبيين. وفي عام 1693 تحديداً، قدم "جون فريد لايبنتز" مفهوم المصفوفات بشكل مستقل عن المحددات، مما مهد الطريق لتطوير نظرية المصفوفات بشكل منفصل [14].

القرن الثامن عشر: شهد القرن الثامن عشر ازدهاراً في دراسة المصفوفات، حيث برز اسم "غابرييل كرامر" كرائد في تطوير قواعد حساب المصفوفات. كما قدم "كارل فريدريش

غاوس" مساهمات هامة في نظرية المحددات، مما ساهم في تعزيز فهم وتحليل المصفوفات [14].

القرن التاسع عشر: في القرن التاسع عشر، ظهر مفهوم "الجبر الخطي" بشكل أوضح، مما أدى إلى تطوير أدوات رياضية جديدة لتحليل المصفوفات. ففي عام 1848، صاغ "جيمس جوزيف سيلفستر" مصطلح "المصفوفة" لوصف مجموعة من العناصر المرتبة [4].

القرن العشرون: شهد القرن العشرون ثورة في تحليل المصفوفات بفضل مساهمات علماء رياضيات بارزين مثل "أرثر كايلى" و"ديفيد هيلبرت". حيث قدم كايلى نظرية المصفوفات الحديثة، بينما ركز هيلبرت على تطوير أساليب جديدة لحل أنظمة المعادلات الخطية الكبيرة [8].

العصر الحديث: مع التقدم التكنولوجي الهائل، برزت تطبيقات جديدة لتحليل المصفوفات في مجالات متعددة مثل الفيزياء والهندسة والعلوم الحاسوبية. ففي مجال الذكاء الاصطناعي، تُستخدم المصفوفات بشكل مكثف في تعلم الآلة ومعالجة اللغة الطبيعية [14].

2. هدف البحث:

يهدف هذا البحث لمعرفة طرائق تحليل المصفوفات و دراسة ميزات و عيوب كل طريقة و المقارنة بينها

3. أهمية البحث:

تأتي أهمية هذا البحث إلى دراسة المصفوفات و جميع طرائق تحليل المصفوفات تمهيداً للبحث عن طرائق جديدة مختلفة تكون أسهل و أقل تعقيداً .

4. المناقشة و النتائج

4-1-1: طرائق في تحليل المصفوفات :

1-1-4 . Carl Friedrich Gauss (1777-1855) : [1]

هو رياضياتي و إحصائي و فيزيائي و عالم ألماني
مساهماته:



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

قدم خوارزمية (Gauss-Jordan جاوس - جوردان) لحل النظم الخطية، والتي تعتمد على تحليل المصفوفة إلى جداء مصفوفتين أولية.

قدم مفهوم "الاختزال إلى الشكل الواحدي" للمصفوفات، والذي يُستخدم لحل النظم الخطية.

مثال:

لنأخذ نظام المعادلات الخطية التالي:

$$2x + 3y = -4$$

$$4x - y = 6$$

المصفوفة الأصلية لهذا النظام هي: $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$

والمصفوفة الموسعة هي: $\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 4 & -1 & 6 \end{bmatrix}$

باستخدام طريقة جاوس-جوردان، يمكن تحويل المصفوفة الموسعة إلى شكل متدرج مختزل:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

مما يعني أن حل النظام هو:

$$x = 1, y = -2$$

مزايًا طريقة جاوس-جوردان:

سهولة الاستخدام: تُسهل المصفوفة الأولية عملية تحويل المصفوفة إلى مصفوفة مختزلة.

دقة النتائج: تضمن طريقة جاوس-جوردان مع المصفوفة الأولية الحصول على حلول دقيقة للمعادلات.

تعدد الاستخدامات: يمكن استخدام طريقة جاوس-جوردان لحل أنظمة المعادلات الخطية من جميع المراتب.

[2] Wilhelm Jordan (1842-1929) 2-1-4

فيلهلم جوردان بالألمانية : هو رياضياتي، وأستاذ جامعي ألماني، ولد في فورتمبيرغ، كان عضوًا في الأكاديمية الوطنية الألمانية للعلوم ليوبولدينا .

مساهماته:

طور خوارزمية جوردن لحل النظم الخطية، والتي تعتمد على تحليل المصفوفة إلى جداء مصفوفتين أولية ، مع العلم أن المصفوفة الأولية هي مصفوفة مربعة قابلة للقلب و تنتج عن عملية سطرية واحدة على المصفوفة الواحدة .

قدم مفهوم "شكل جوردن" للمصفوفات، والذي يُستخدم لتحديد خصائص المصفوفة، مثل قابلية للقلب و تقطير المصفوفات .



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

عيوب خوارزمية جوردن: قد تكون هذه الخوارزمية غير فعالة لحل النظم الخطية الكبيرة، حيث تتطلب عددًا كبيرًا من العمليات الحسابية.

3-1-4 Felix Klein (1849–1925): [3]

هو عالم رياضيات ألماني

مساهماته:

قدم مفهوم "المصفوفة المتناظرة تخالفيًا"، والتي تلعب دورًا هامًا في تحليل المصفوفات إلى جداء مصفوفتين. حيث أن المصفوفة المتناظرة تخالفيًا: هي مصفوفة مربعة A تُحقق: $A^T = -A$.

4-1-4 جيمس جوزيف سيلفستر (1814 – 1897) James Joseph Sylvester: [5], [6]

عالم رياضيات إنجليزي يُنسب إليه صياغة مصطلح "مصفوفة" عام 1848، وقدم مساهمات هامة في نظرية المصفوفات.

طور نظرية المحددات، والتي تُستخدم لحساب قيمة دالة محددة لمصفوفة.

قدم سيلفستر مفهوم المصفوفة المتناظرة لأول مرة في ورقة بحثية بعنوان "حول نظرية المصفوفات".

عرّف المصفوفة المتناظرة على أنها مصفوفة تكون مساوية لمنقولها.

أوضح خصائص المصفوفات المتناظرة، مثل حقيقة أنها دائماً ما يكون لها قيم ذاتية حقيقية.

واصل سيلفستر تطوير نظريته حول المصفوفات المتناظرة في ورقة بحثية أخرى بعنوان "حول نظرية المصفوفات المتناظرة".

قدم مفهوم "المصفوفة المتناظرة الجزئية" ونظرية "المصفوفات المتناظرة المركبة".

ناقش تطبيقات المصفوفات المتناظرة في مجالات مثل الهندسة التحليلية والفيزياء.

عيوب نظرية المحددات: قد تكون حساب قيمة محدد المصفوفة صعبة، خاصة بالنسبة للمصفوفات الكبيرة.

5-1-4 ديفيد هيلبرت (1862–1943) David Hilbert: [7]

هو عالم رياضيات ألماني في المرتبة الأولى بين رياضيي القرن العشرين. فبدل إلقاء محاضرة

عام 1900 فضل هيلبرت أن يطرح أمام 250 رياضياً مشاركاً في المؤتمر الدولي للرياضيات قائمة من المسائل

المعقدة تضم 23 مسألة رياضية من شأنها أن تنمي البحث في مختلف جوانب الرياضيات.

مساهماته:

طور نظرية المصفوفات المتكاملة، والتي تُستخدم لدراسة خصائص المصفوفات من مراتب لا نهائية.

حيث إنّ المصفوفة المتكاملة هي مصفوفة مربعة عناصرها هي تكاملات دوال قابلة للمكاملة.

على سبيل المثال:



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$\begin{bmatrix} \int a^b f(x) dx & \int a^b g(x) dx \\ \int a^b h(x) dx & \int a^b k(x) dx \end{bmatrix}$$

تهدف نظرية المصفوفات المتكاملة إلى فهم العلاقة بين خصائص المصفوفة المتكاملة وخصائص الدوال التي تتكون منها عناصرها.

تتضمن بعض التطبيقات في نظرية المصفوفات المتكاملة ما يأتي:

التحليل: إيجاد مصفوفات أخرى يمكن ضربها معاً لإعطاء مصفوفة متكاملة معينة.

التشابه: تحديد ما إذا كانت مصفوفتان متكاملتان متشابهتين، حيث نقول عن مصفوفتين A, B أنهما متشابهتين إذا أمكن إيجاد مصفوفة نظامية R بحيث $B = RAR^{-1}$ أو $A = R^{-1}BR$

القيم الذاتية: إيجاد القيم الذاتية لمصفوفة متكاملة.

التطبيقات: استخدام المصفوفات المتكاملة لحل معادلات التكامل وحل المعادلات التفاضلية ومعالجة الإشارات وغيرها.

في التحليل العددي: تُستخدم المصفوفات المتكاملة لحل معادلات التكامل وحل المعادلات التفاضلية بطرق تقريبية.

في معالجة الإشارات: تُستخدم المصفوفات المتكاملة لتصفية الإشارات وتحليلها.

في الفيزياء: تُستخدم المصفوفات المتكاملة لنمذجة أنظمة فيزيائية معقدة، مثل أنظمة ميكانيكا الكم.

ملاحظة: نظرية المصفوفات المتكاملة هي مجال رياضي متقدم نسبياً.

4-1-6 آرثر كايلى (1821-1898): [8]

عالم رياضيات إنجليزي يُعتبر من مؤسسي الجبر الخطي ونظرية المصفوفات، حيث قدّم عام 1855 المصفوفات كتمثيل للعناصر الخطية درس المصفوفة المتعامدة و عرفها كالاتي : هي مصفوفة مربعة $(n \times n)$ تُحقّق الشروط التالية:

1- أعمدة المصفوفة متعامدة مع بعضها البعض. بمعنى أنّ الجداء الداخلي لأيّ عمودين من أعمدة المصفوفة يساوي الصفر.

2- طول كلّ عمود من أعمدة المصفوفة يساوي 1. بمعنى أنّ الجداء الداخلي لأيّ عمود من أعمدة المصفوفة بنفسه يُنتج 1.

توصل كايلى إلى المبرهنين الآتيتين :

مبرهنة 1: لتكن S مصفوفة متناظرة تخالفاً على $R^{n \times n}$ مع عدم وجود قيمة ذاتية تساوي 1 عندئذٍ المصفوفة $Q = (S - 1)^{-1}(S + 1)$ متعامدة .

مبرهنة 2: لتكن $Q \in R^{n \times n}$ مصفوفة متعامدة عندئذٍ $S = (Q - 1)^{-1}(Q + 1)$ مصفوفة متناظرة تخالفاً.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

7-1-4 (جيفنز) (1950) Givens [10] , [9] :

دوران جيفنز :

إن تحويلات هاوس هولدر مفيدة في تحويل عناصر مصفوفة إلى أصفار ، مثلاً في تحويل هاوس هولدر الأول تحول جميع عناصر المتجه الأول (العمود الأول) إلى أصفار ماعدا العنصر الأول. أما دوران جيفنز يكون تحويل عناصر المصفوفة إلى

أصفار بشكل أكثر انتقائية حيث إنّ تدويرات جيفنز هي عبارة عن مصفوفات دوران تستخدم لتحويل عناصر معينة في المصفوفة إلى الصفر.

مصفوفة جيفنز هي مصفوفة واحدة مع استبدال عناصر معينة بعناصر من زاوية دوران معينة .
يمكن تمثيل مصفوفة جيفنز كالاتي :

$$G(i, k, \theta) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & c & \dots & s & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & -s & \dots & c & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} i \\ \\ k \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

حيث $c = \cos(\theta)$, $s = \sin(\theta)$ يتم وضعهما في الصفين i, j

من الواضح أن دوران جيفنز متعامد و إن الضرب المسبق ب $G(i, j, \theta)^T$ ينفذ دوران بعكس اتجاه

عقارب الساعة بمقدار زاوية θ في المستوي الإحداثي (i, k)

طريقة العمل : لنفترض أننا نريد تحويل العنصر a_{ij} في المصفوفة A إلى الصفر باستخدام تدوير جيفنز

نقوم بالخطوات الآتية :

نحدد الزاوية θ بحيث تحقق :

$$c = \cos(\theta) = a_{ii} / \sqrt{a_{ii}^2 + a_{ij}^2}$$

$$s = \sin(\theta) = a_{ij} / \sqrt{a_{ii}^2 + a_{ij}^2}$$

نطبق مصفوفة جيفنز $G(i, j, \theta)$ على المصفوفة A لضبط العناصر المستهدفة وتعديلها بطريقة تدريجية

لتحويلها إلى الشكل المطلوب .

مثال:



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

نفترض أن لدينا المصفوفة التالية: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ نريد استخدام تدويرات جيفنز لتحويل المصفوفة A إلى مصفوفة مثلثية عليا .

أولاً: نحتاج إلى تحديد الزاوية θ التي ستجعل العنصر a_{32} (العنصر في الصف الثالث و العمود الثاني) يساوي صفراً

$$\sin(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{ثم } r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \quad \text{ثانياً : نقوم بإنشاء مصفوفة جيفنز } G :$$

ثالثاً : نضرب مصفوفة G في A لتحويل العنصر a_{21} إلى صفر :

$$G \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} & 4\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

و نتابع بتطبيق دوران جيفنز حتى تصبح A مصفوفة مثلثية عليا .

4-1-8- غرام و شميدت (Gram-Schmidt) : [11]

يعود تاريخ بحث غرام شميدت إلى عام 1935، عندما قدم كل من يورغن غرام و إرنست شميدت طريقة رياضية لتحويل جملة من المتجهات إلى جملة متعامدة.
 يورغن غرام:

رياضياتي دانماركي (1887-1931).

قدم مفهوم "عملية غرام" لحساب الزاوية بين متجهين في فضاء هيلبرت.

توفي غرام قبل نشر بحثه حول عملية غرام.

إرنست شميدت:

رياضياتي ألماني (1894-1966).

طور "عملية شميدت" لتحويل جملة من المتجهات إلى جملة متعامدة.

نشر بحث غرام وشميدت معاً عام 1935.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

تُستخدم طريقة غرام شميدت في تحويل مصفوفة إلى ناتج حاصل ضرب مصفوفة متعامدة ومصفوفة مثلثية عليا

تبدأ عملية غرام شميدت في تدوين المصفوفة من أجل $k = 1$ to n

$$b_k = a_k - \sum_{j=1}^{k-1} (a_k \cdot q_j) q_j,$$

$$q_k = \frac{b_k}{\|b_k\|},$$

أما طريقة غرام شميدت المعدلة إذا كانت (b_1, b_2, \dots, b_n) مجموعة متجهات تشكل قاعدة عندئذٍ نبنى قاعدة متعامدة (u_1, u_2, \dots, u_n) وفق الآتي: حسب [15]

$$\tilde{u}_j = b_j - \sum_{k=1}^{j-1} \frac{(\tilde{u}_j^T b_k)}{\tilde{u}_j^T \tilde{u}_j} \tilde{u}_k$$

$$u_j = \frac{\tilde{u}_j}{\|\tilde{u}_j\|}.$$

فوائد طريقة غرام شميدت المعدلة:

تجنب تراكم الأخطاء: تُساعد طريقة غرام شميدت المعدلة على تجنب تراكم الأخطاء العددية التي يمكن أن تحدث في الطريقة الأصلية.

تحسين الاستقرار العددي: تُعد طريقة غرام شميدت المعدلة أكثر استقرارًا عدديًا من الطريقة الأصلية، خاصةً عندما تكون المتجهات المدخلة قريبة من بعضها البعض.

سهولة الاستخدام: تُعد طريقة غرام شميدت المعدلة أسهل في الفهم والتنفيذ من الطريقة الأصلية.

عيوب طريقة غرام شميدت في تحليل المصفوفات:

إذا كانت قيم بيانات المدخلات قريبة من بعضها البعض، فقد تؤدي طريقة غرام شميدت إلى نتائج غير دقيقة أو غير متوقعة.

إنَّ لخوارزمية طريقة غرام شميدت تعقيد عالٍ خاصةً للمصفوفات الكبيرة ذلك لأنها تتطلب إجراء العديد من العمليات الحسابية، مثل الضرب النقطي و الطرح.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

مع ازدياد حجم المصفوفة، تصبح هذه العمليات الحسابية أكثر تعقيداً من حيث الوقت والذاكرة . قد تؤدي طريقة غرام شميدت إلى فقدان الدقة ذلك لأنها تقوم باستخدام المتجهات الجديدة خطوة بخطوة، مما قد يؤدي إلى تراكم أخطاء التقريب.

بشكل عام، لا تعد طريقة غرام شميدت الخيار الأمثل لتحليل المصفوفات في جميع الحالات .

9-1-4 ستيب John H. Staib [12] :

أثار **Staib** في عام 1969 بعض الاعتراضات على عملية جرام شميدت حيث وجد العملية مرهقة و بالتالي قدم بديلاً و هي طريقة المصفوفة.

4 - Anthony E. Hoffman هوفمان: [13]

في عام 1970 قارن **Hoffman** بين طريقة غرام شميدت و طريقة ستيب البديلة و إن طريقة غرام شميدت ليست سيئة للغاية.

4-1-11- طريقة هاوس هولدر في تحليل QR (1958): [15]

قدم عالم الرياضيات الأمريكي مارفن هاوس هولدر طريقة هاوس هولدر التي تدعى غالباً الانعكاسات .
لتكن A مصفوفة $n \times n$ فإن الطريقة ببناء سلسلة من المصفوفات المتعامدة H_i بحيث

$$H = \prod_{i=n-1}^1 H_i$$

و تخفض i و تحول A إلى الشكل المثلثي العلوي

حساب H_i هو تعميم بسيط لحساب H_1

نقوم بتسمية كل عمود باستخدام المتجهات

$$A = [\vec{u}_1 \quad \vec{u}_2 \quad \dots \quad \vec{u}_n] .$$

$$H_{v^\perp} = I - \frac{2vv^T}{v^T v}$$

نعرف $e_1^T = [1, 0, \dots, 0]$, $v = \frac{1}{\|u_1\|} \|u_1\| e_1 - u_1$,

تدعى مصفوفة هاوس هولدر عندئذ H_1 هي مصفوفة باستخدام العمود الأول



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$H_1 = I - \frac{2vv^T}{v^T v} .$$

عندئذ H_1 متعامد و $H_1 A$ هي مصفوفة فيها العمود الأول $\|u_1\|e_1$.
ثم نواصل مع المصفوفة الفرعية التي تم الحصول عليها من $H_1 A$ عن طريق حذف الصف و العمود الأول حتى نحصل على :

$$HA = H_{n-1}H_{n-2} \dots H_1 A = R .$$

$$A = H^{-1}R = QR .$$

حيث :

Q مصفوفة متعامدة

R مصفوفة مثلثية عليا

يُستخدم هذا التحليل في العديد من التطبيقات، بما في ذلك:

1- حلّ مسائل القيمة الذاتية.

2- تحويل المصفوفات.

3- حلّ النظم الخطية.

4- معالجة البيانات.

عيوب هاوس هولدر :

الحساب معقد إلا أنه مع تطور التكنولوجيا، أصبحت الحسابات المعقدة أسهل وأسرع في التنفيذ.
عدم الكفاءة في بعض الحالات: تُوجد خيارات أخرى لتحليل المصفوفات ذات الأبعاد الكبيرة أو الكثيفة،
مثل طريق QR ، قد تكون أكثر كفاءة.
يمكن توسيع طريقة هاوس هولدر ب لتشمل أنواع أخرى من المصفوفات، ولكن ذلك يتطلب جهدًا بحثيًا إضافيًا.

إن الخطوات لتحليل المصفوفة مع الصف المنخفض و الحذف الغاوصي تكون شاقة و كذلك عملية غرام شميدت و تحويلات هاوس هولدر.

2-4- تحليل LU: [16]



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

يعود تحليل LU إلى أوائل القرن العشرين حيث قام كل من علماء الرياضيات ليفون ريمان و إرنست كروتش بتمهيد الطريق لتحليل LU و مع ذلك لم يتم صياغة التحليل بشكل كامل و تعميمه حتى الأربعينيات من القرن الماضي ، عندما قدمه علماء الرياضيات هانس كوهن و ويليام فولر بشكل مستقل .

تعريف (1) المصفوفة المتعامدة : نقول عن مصفوفة A أنها متعامدة إذا حققت الشرط $A^T = A^{-1}$.

تعريف (2) المصفوفة المثلثية العليا : نقول عن مصفوفة A أنها مصفوفة مثلثية عليا إذا كانت جميع العناصر تحت القطر الرئيسي تساوي الصفر .

تعريف (3) المصفوفة المثلثية السفلى : نقول عن مصفوفة A أنها مصفوفة مثلثية سفلى إذا كانت جميع العناصر فوق القطر الرئيسي تساوي الصفر .

تعريف (4) تحليل LU : المعروف أيضاً باسم التحليل العوامل السفلية العليا وهو تحليل يُستخدم لتحويل مصفوفة إلى جداء مصفوفة مثلثية عليا ومصفوفة مثلثية سفلى.

تعريف (5) تحليل QR : هو تحليل يُستخدم لتحويل مصفوفة إلى جداء مصفوفة متعامدة ومصفوفة مثلثية عليا.

تعريف (6) المصفوفة المتناثرة : نقول عن مصفوفة أنها متناثرة إذا كان أغلب عناصرها أصفار .

1-2-4. الفرق بين تحليل QR وتحليل LU :

تحليل QR و تحليل LU هما تقنيتان شائعتان لتحليل المصفوفات، ولكل منهما مزايا وعيوب تناسب احتياجات محددة.

مقارنة بين تحليل LU و تحليل QR

الميزة	تحليل QR	تحليل LU
الغرض	تحويل مصفوفة إلى جداء مصفوفة متعامدة ومصفوفة مثلثية عليا.	تحويل مصفوفة إلى جداء مصفوفة مثلثية عليا ومصفوفة مثلثية سفلى.
التطبيقات	حل جمل المعادلات الخطية ، تصنيف البيانات ، معالجة الإشارات.	حل جمل المعادلات الخطية ، إيجاد مقلوب مصفوفة .



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

الخصائص	مستقر عدديًا، لا يتطلب تبادل الصفوف.	أسرع في بعض الحالات ، غير مستقر عدديًا.
متى نختار	الاستقرار العددي مهم، المصفوفة متناثرة ، تحليل الانحدار الخطي أو تصنيف البيانات ضروري.	سرعة الحساب مهمة، معلومات عن بنية المصفوفة ضرورية، حل جملة معادلات خطية صغير ضروري.

4-3- أمثلة عن تحليل LU و QR :

مثال (1):

لدينا جملة المعادلات الآتية سنوجد حلاً لها باستخدام طريقة تحليل LU :

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1$$

$$6x_1 + 2x_2 + 7x_3 = 0$$

$$4x_1 + 8x_2 + 2x_3 = 2$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 7 \\ 4 & 8 & 2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{الحل :}$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = LU \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13} + u_{23} \\ l_{31}u_{11} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{bmatrix}$$

$$u_{11} = 2 \quad , \quad u_{12} = 1 \quad , \quad u_{13} = 3 \quad \text{نجد أن :}$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} = \frac{6}{2} = 3$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}} = \frac{4}{2} = 2$$

من الخطوة الأولى أوجدنا السطر الأول من U و العمود الأول من L ثم نكمل :



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = 2 - 3 = -1$$

$$u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13} = 7 - 3(3) = -2$$

$$l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}u_{12}}{u_{22}} = \frac{8 - 2}{-1} = -6$$

$$u_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} = 2 - 2(3) - (-6)(-2) = -16$$

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -16 \end{bmatrix}$$

الآن سنوجد \vec{Y} من $L\vec{Y} = \vec{b}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = 1$$

$$3y_1 + y_2 = 0 \rightarrow y_2 = -3$$

$$2y_1 - 6y_2 + y_3 = 2 \rightarrow y_3 = -18$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -18 \end{bmatrix}$$

لنوجد \vec{X} من $U\vec{X} = \vec{Y}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -18 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -1.562 \\ 0.75 \\ 1.125 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

إذا قمنا في هذا المثال بتحليل المصفوفة A إلى جداء مصفوفتين L مصفوفة مثلثية عليا و U مصفوفة مثلثية سفلى .

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 6 & 2 & 7 \\ 4 & 8 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -16 \end{bmatrix}$$

مثال (2): لدينا المصفوفة A المطلوب أن نحلل A بالطريقة المناسبة :



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = QR$$

$$u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$v_1 = u_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{u}_2 = \left(\frac{u_2 \cdot v_1}{v_1 \cdot v_1} \right) v_1 = \left(\frac{\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}} \right) \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \left(\frac{15}{9} \right) \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10/3 \\ 10/3 \\ 5/3 \end{bmatrix}$$

$$v_2 = u_2 - \tilde{u}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10/3 \\ 10/3 \\ 5/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$w_1 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}, \quad w_2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{bmatrix}$$

$$Q = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 \\ 2/3 & 2/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{bmatrix}$$

$$A = QR$$

$$Q^T A = Q^T Q R = I R = R \Rightarrow R = Q^T A$$

$$R = \begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$AX = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{الآن سنوجد حل المعادلة:}$$

$$A^T A \tilde{X} = A^T b$$

$$(QR)^T (QR) \tilde{X} = (QR)^T b$$

$$R^T Q^T QR \tilde{X} = R^T Q^T b$$

$$R^T R \tilde{X} = R^T Q^T b$$

$$R \tilde{X} = Q^T b$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 3\tilde{x} + 5\tilde{y} = 7 \\ \tilde{y} = -1 \end{cases} \Rightarrow 3\tilde{x} = 7 - 5\tilde{y} = 7 + 5 = 12 \Rightarrow \tilde{x} = 4$$

$$\tilde{X} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

اخترنا في هذا المثال طريقة غرام وشميدت و كانت مناسبة لأن أبعاد المصفوفة A هو 3*2

ولو كانت أبعاد المصفوفة أكبر لكان الحل أطول بكثير و أكثر تعقيداً .

5. النتائج:

تمّ مراجعة جميع طرائق تحليل المصفوفات و تم دراسة ميزات و عيوب كل طريقة و تم ذكر كل التعاريف المهمة للمصفوفات .

6. المقترحات والتوصيات:

إنّ دراسة تحليل المصفوفات و مراجعة جميع الطرائق السابقة لتحليل المصفوفات و مقارنة تلك الطرائق مع بعضها البعض وإلقاء الضوء على عيوب كل طريقة يفتح لنا آفاق جديدة لنوجد طرائق أفضل و تلافي سلبيات الطرائق السابقة .

المراجع:

1. Franze.e ; Hohn ; Elementary Matrix Algebra . New York (1973).
2. James Barrie Shaw, Synopsis Of Liner Associative Algebra , University Of Florida Library (1951) .
3. Felix Klein , Elementary Mathematics from an Advanced Standpoint , (1908) .



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

4. Sylvester, J. J. On the theory of matrices. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 33(202), 469-475. (1848).
5. Sylvester, J. J. On the theory of symmetric matrices. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 35(243), 435-445 .(1850).
6. Horn, R. A & ., Johnson, C. R Matrix analysis. Cambridge University Press. (1994).
7. David Hilbert , Paul Bernays. Grundlagen der Mathematik. The Germany 1934 , 1939.
8. F. R. Gantmacher. The Theory of Matrices, volume I. Chelsea, 1960.
9. Givens ,Wallace" . A method for computing orthogonal transformations with very small rounding errors ".Numerische Mathematik.100-95 :(1950) .
10. Givens ,Joseph" . -Computation of orthogonal bases and their applications to linear least squares problems ".Numerische Mathematik.22-1 :(1954) 4
- 11 - Richard Earl, James R. Nicholson, and Christopher Clapham. The concise Oxford dictionary of mathematics. Oxford: Oxford University Press, sixth edition, 2021.
- 12 - John H. Staib. An alternative to the Gram-Schmidt process. Mathematics Magazine, 42(4):203–205, Sep., 1969
- 13 - Anthony E. Hoffman. The Gram-Schmidt process is not so bad! MathematicsMagazine,43(5):261–263, Nov., 1970.
- 14 - Carl B. Boyer. A History of Mathematics. John Wiley and Sons Inc., Hoboken,New Jersey, 3rd edition, 2011.
- 15- R.M. Corless and N. Fillion. A graduate introduction to numerical methods. Springer, 2013
- 16- Pavel Cizek , Lenka Čížková . Numerical Linear Algebra. Tilburg University . Article . January 2004 .

أشجار الفيتاغوريات الأولية (دراسة مرجعية)

الدكتور محمد شرباتي

الدكتور باسل العرنوس

الطالبة: ريم الزيتون



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

مقدمة: بدأ فيثاغورث حوالي 200 سنة ق.م. و *Diophantus* حوالي 200 سنة م باكتشاف الثلاثيات صحيحة أولية حيث عرف فيثاغورث الثلاثي الأولي للأعداد a, b, c الصحيحة بالعلاقة $a^2 + b^2 = c^2$ حيث b, a

ساقين لمتثلت قائم والثلاثي (a, b, c) أولي أي أن $GCD(a, b, c) = 1$ حيث أن ثلاثيات فيثاغورث والشكل التربيعي المرتبط بها $a^2 + b^2 = c^2$ واحدة من أقدم معادلات *Diophantus* وكذلك اكتشف فيثاغورث حوال 300 سنة ق.م الفرع الذي ينمو بأعداد فردية 3.....9,7,5, للشجرة وأفلاطون اكتشف الفرع الذي ينمو بأعداد زوجية ... 16,12,8,4 حيث أن الشجرة لا تتكون من فرعين هناك فروع أخرى تنمو بأعداد محدودة .

أما أفليديس منذ أكثر من ألفي عام قدم طريقة لتوليد ثلاثة أعداد صحيحة انطلاقاً من عددين صحيحين (n, m) و $m > n$ تحقق : $c = m^2 + n^2$ $b = 2nm$ $a = m^2 - n^2$

وفي عام 1934 قدم *Berggren* مجموعة كل ثلاثيات فيثاغورث الأولية وأوجد طريقة لتوليد الثلاثيات بالاعتماد على مصفوفات وتسمى مصفوفات *Berggren* في العصر البابلي عرف *Diophantus*

كيفية ارتباط الثلاثيات الفيثاغورثية على دائرة الوحدة من خلال $(\frac{t^2-1}{t^2+1}, \frac{2t}{t^2+1})$ وكذلك هناك علاقة تربط

ثلاثيات فيثاغورث مع اعداد غاوسيه $Z(i)$ الاعداد العقدية $u = x + iy$ حيث y, x أعداد صحيحة تصح معادلة فيثاغورث

$$N(u) = u\bar{u} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$$

مجموعة مربعات أعداد صحيحة غاوسيه $\theta = (m + ni)^2 = (m^2 - n^2) + (2mni)$ من خلال **ميرهنه:** X مصفوفة عدد صحيح تحقق $X^2 = 0$ حيث $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & -x \end{pmatrix}$ أعداد صحيحة عندئذ $yz + x^2 = 0$ والعكس صحيح .

الاثبات: بفرض x مصفوفة عدد صحيح تحقق $x^2 = 0$

$$\begin{cases} tr(X)X = det(X)I \\ tr(X) = det(X) = 0 \end{cases}$$

X مصفوفة غير صفرية و I مصفوفة واحدة.

$$N = \{X \in M_2(Z), X^2 = 0\}$$

تشابه صف المصفوفات $\{X \in M_2(Z), X^2 = 0\} = \{T \times T^{-1}, \in GL_2(Z)\}$ مجموعة تحويلات خطية قابلة للعكس في Z^2 .

$$E = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, E^t \in [E], E \text{ باستخدام } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, -E \in [E], \text{ ومصفوفة } D = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \varepsilon_\lambda = [\lambda E]$$

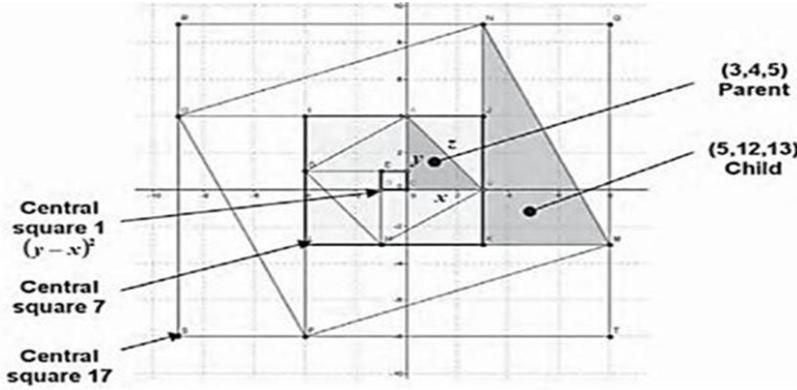
$\lambda \in N$ واضح $\varepsilon_\lambda = \lambda[E]$ من السهل تحقق $\lambda \neq \mu$

1. **طريقة فيثاغورث وأفلاطون في إنشاء الشجرة :**

أما فيثاغورث وأفلاطون اعتمدا في إنشاء الشجرة على طريقة المربع المركزي حيث أن قيم y, z تعتمد على زيادة في قيم x أما هندسياً تنص النظرية جميع مثلثات الثلاثيات تتعلق ببعضها البعض عبر المربعات المتوسطة جميع المثلثات تدور حول مربع مركزي طول ضلعه $(y - x)^2$ عندما تكون المثلثات مغلقة يتشكل مربع مركزي جديد بتكرار هذه العملية تتشكل فروع الشجرة.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية



اعتمد فيثاغورث وأفلاطون على طريقة اساسية لنمو الشجرة حيث كل فرع يعطي ثلاثة فروع وهناك ترابط هندسي على طول المسار إلى الثلاثي الأولي (3,4,5) حيث بالطريقة على النحو التالي:

1. مثلث قائم أطوال أضلاعه (3,4,5) يدور حول مربع مركزي طول ضلعه 1 يعطي مربع طول ضلعه 7 ينمو فرع فيثاغورث بمقدار $2 \leftarrow 3 + 2 = 3$ بجمع طول الضلع الأقصر مع طول ضلع المربع نحصل على $5 + 7 = 12$ ويتوصل الطرف يعطي الثلاثي (5,12,13) يدور حول مربع طول ضلعه 7 ينمو فرع أفلاطون مقدار 4 من الثلاثي (3,4,5) نستطيع أن نعلم أن مقدار النمو حيث $4 = 7 - 3$ و نجمع مقدار النمو $8 = 4 + 4$ و نجمع طول الضلع الأقصر من الثلاثي (5,12,13) مع طول ضلع مربع 7 و $15 = 4 + 7$ ويتوصل الطرف الثالث نحصل على ثلاثي (8,15,17) من فرع فيثاغورث $20 = 12 + 4$ من فرع أفلاطون $21 = 18 + 3$ نحصل على ثلاثي (20,21,29) مثلثات التي تمثل الثلاثيات (5,12,13) و (8,15,17) تدور حول مربع طول ضلعه $7, 7 = 15 - 8 = 12 - 5$ مثلثات التي تمثل الثلاثيات (3,4,5) و (20,21,29) تدور حول مربع طول ضلعه 1 و $1 = 21 - 20 = 4 - 3$ كما رأينا طريقة فيثاغورث وأفلاطون يوجد فيهما صعوبة

2. طريقة Berggren في إنشاء الشجرة :

قام Berggren لتسهيل الحصول على أفرع الشجرة باستخدام ثلاثة مصفوفات .

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

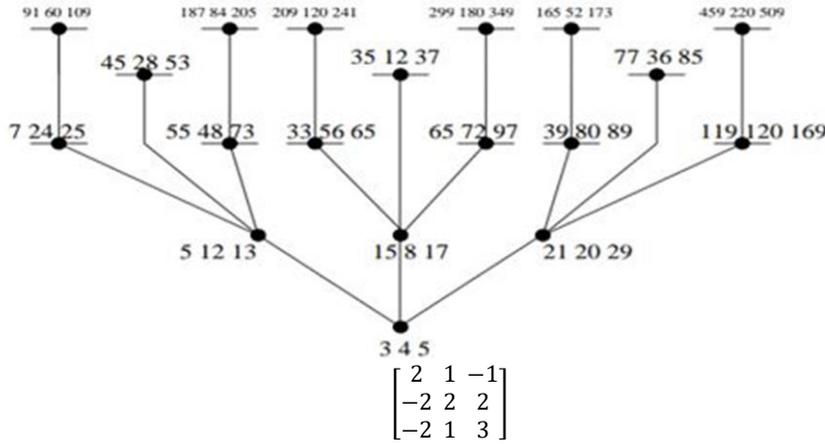
بضرب الثلاث $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$ بيمين المصفوفة A نحصل على فرع جديد



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

ببميين المصفوفة B نحصل على فرع جديد $A\theta = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 12 \\ 13 \end{bmatrix}$ وأيضاً بضرب الثلاثي $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

ببميين المصفوفة C نحصل على فرع جديد نلاحظ ان طريقة Berggren أسهل من طريقة فيثاغورث وأفلاطون $\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$



$$|\hat{A} - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & -1 \\ -2 & 2 - \lambda & 2 \\ -2 & 1 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(\hat{A} - \lambda) \theta = 0$$

$$(\lambda^2 - 5\lambda + 4)(2 - \lambda) = 0$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 4 = 0 \rightarrow \lambda = 1, 2, 4$$

$$\lambda = 1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{إيجاد مجتهادات ذاتية من خلال قيم ذاتية} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{لكل قيمة ذاتية مصفوفة}$$

$$\lambda = 2 \quad \hat{A} = \lambda I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad x_1 - x_3 = 0 \quad x_2 = 0 \rightarrow \begin{bmatrix} x_3 \\ 0 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$\lambda = 4 \quad \hat{A} - \lambda I = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 0 \quad \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad x_2 - x_3 = 0$$

$$\begin{bmatrix} x_3 & x_3 & 0 \\ 0 & x_3 & x_3 \\ x_3 & x_3 & x_3 \end{bmatrix} \quad p = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \hat{A} = PDP^{-1}$$

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^K = \begin{bmatrix} 2^K & 2^K - 1 & 1 - 2^K \\ 2^K - 4^K & 2^K & 4^K - 2^K \\ 2^K - 4^K & 2^K - 1 & 1 + 4 - 2^K \end{bmatrix}$$

وبنفس الطريقة نحصل على \hat{B} و \hat{C}

تطبيق تحويل خطي على منظومة ذات 4 أبعاد

سالم سالم / جامعة البعث / ss132938@gmail.com

ملخص البحث:

التحويلات الخطية هي عمليات رياضية تستخدم لتحويل وتغيير الشكل والخصائص الرياضية للأشياء أو النظم الرياضية. تستخدم التحويلات الخطية في مجموعة متنوعة من المجالات بما في ذلك الرياضيات، الفيزياء، الهندسة، وعلوم الحاسوب. سنقوم في هذا البحث باشتقاق مجموعة من المعادلات التفاضلية التي يمكن استخدامها في البحوث والتطبيقات لحساب معامل ليايونوف الأسّي الأعظمي من أجل أي منظومة ديناميكية ذات بعد في الحالة العامة ومعرفة تأثير التحويل الخطي على معامل ليايونوف الأسّي الأعظمي وتمت دراسة منظومة لورنز ذات 4 ابعاد الديناميكية مثال على ذلك.

كلمات مفتاحية: منظومة ديناميكية، معامل ليايونوف، المعادلات التفاضلية، التحويلات الخطية.



**المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية**

APPLYING A LINEAR TRANSFORM TO THE LORENZ 4D SYSTEM

Abstract

Linear transformations are mathematical operations used to transform and change the shape and mathematical properties of mathematical objects or systems. Linear transformations are used in a variety of fields including mathematics, physics, engineering, and computer science.

In this research, we will derive general differential equations which can be used in practice to calculate the largest Lyapunov exponent for an n-dimensional dynamical system.

The dynamic Lorenz 4d system has been studied as an example.

Keywords: dynamic system, Lyapunov exponent, differential equations, transformation liner.

المقدمة:

في الرياضيات، التحويلات الخطية تتعامل مع الأشكال الهندسية والنظم الرياضية وتعمل على تحويلها بحيث تحافظ على الخصائص الأساسية مثل الزوايا والمسافات والنسب. يمكن استخدام التحويلات الخطية للتعامل مع النقاط والمتجهات والمصفوفات والدوال الرياضية والمعادلات التفاضلية. وفي الفيزياء، التحويلات الخطية تستخدم لوصف حركة الأجسام والتفاعلات الفيزيائية. على سبيل المثال، يمكن استخدام التحويلات الخطية لتحويل النظام الديناميكي من نظام تفاضلي غير خطي إلى نظام تفاضلي خطي، مما يسهل تحليله وفهمه. وفي علوم الحاسوب، التحويلات الخطية تستخدم لتحويل وتغيير الصور والصوت والفيديو والبيانات الرقمية بشكل عام. يمكن استخدام التحويلات الخطية للتلاعب بخصائص الصورة مثل التغيير في الحجم والتدوير والانعكاس والتوازن اللوني. وفي الهندسة، التحويلات الخطية تستخدم لتحويل الأشكال الهندسية والمجسمات الثلاثية الأبعاد. يمكن استخدام التحويلات الخطية لتغيير الحجم والشكل والموقع والتوجيه للأشكال الهندسية. بصفة عامة، التحويلات الخطية توفر أدوات قوية لتحليل وتغيير الأشكال والنظم الرياضية بطرق محددة ومنظمة. يتم استخدامها في العديد من المجالات لتبسيط وفهم وتحسين النماذج الرياضية والأنظمة المعقدة.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

الانظمة اللاخطية

الأنظمة اللاخطية هي نوع من المنظومات الديناميكية التي تتبع العلاقات الرياضية غير الخطية. تتميز الأنظمة اللاخطية بعدة خصائص مهمة:

1. تعقيد الحل: يعتبر حل المعادلات اللاخطية أكثر تعقيداً من الحل في الأنظمة الخطية. قد يتطلب الأمر استخدام تقنيات رياضية متقدمة مثل التكامل العددي أو التقريب العددي للحصول على حلول قريبة.
2. غير قابلة للتجزئة: في الأنظمة اللاخطية، لا يمكن تجزئة المعادلات إلى أجزاء مستقلة يمكن حلها بشكل منفصل. بدلاً من ذلك، تتفاعل المتغيرات في النظام بشكل معقد ومتداخل.

3. الاستجابة غير الخطية للمدخلات: في الأنظمة اللاخطية، قد تكون الاستجابة للمدخلات غير خطية وغير متناسبة. قد تحدث تغيرات غير متوقعة أو غير خطية في الاستجابة بناءً على قيمة المدخل.
 4. وجود تفاعلات غير خطية: في الأنظمة اللاخطية، قد تكون هناك تفاعلات غير خطية وتغيرات غير متوقعة في السلوك. هذا يعني أن النظام قد يظهر سلوكاً معقداً يصعب تحليله بسهولة.
 5. تنوع السلوك: بسبب الطبيعة غير الخطية للأنظمة اللاخطية، يمكن أن تظهر مجموعة متنوعة من السلوك والأنماط في الاستجابة. قد يكون هناك تغيرات مفاجئة أو تذبذبات أو حتى حالات من الفوضى.
- تتميز الأنظمة اللاخطية بتعقيد سلوكها وتحليلها ولكنها تعتبر مهمة في العديد من المجالات مثل الديناميكا الحيوية والطبيعة والاقتصاد والعلوم الاجتماعية.

جاذب المنظومة الديناميكية (Attractor of a Dynamical System):

جاذب المنظومة الديناميكية هو مفهوم يستخدم في دراسة الأنظمة الديناميكية لوصف سلوكها العام ومستوى استقرارها. يعبر عن القدرة اللازمة للنظام لجذب أو تجاذب الحالات الابتدائية أو الاضطرابات والعودة إلى حالة مستقرة أو موقف توازن.

الجاذب هو خاصية هامة للأنظمة الديناميكية، حيث يمكن استخدامها لتحليل الاستقرار والتحكم في النظام. الجاذب هو مسار (أو مجموعة من المسارات) المتموضعة في منطقة محددة من فضاء موضع المنظومة الديناميكية والتي تمتلك جواراً (neighborhood) في هذا الفضاء بحيث أن أي مسار (trajectory) لهذه المنظومة يبدأ من نقطة داخل هذا الجوار ويقترّب من الجاذب عندما يسعى الزمن إلى اللانهاية [Gaponov-Grekhov and Rabinovitch (1992)].

هناك مفهوم أساسي وهام جداً مرتبط بجاذب المنظومة الديناميكية وهو مجال الجذب (basin of attraction) وهو الذي يعرف على أنه أعظم جوار لهذا الجاذب يحقق الخاصية السابقة. ولسوء الحظ فإنه في حال وجود أكثر من جاذب واحد لمنظومة ديناميكية فإن الحد الفاصل (boundary) ما بين مجالي جذب هذين الجاذبين يمكن أن يكون



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

معقداً للغاية. وبشكل خاص يمكن أن تكون حلول هذه المنظومة ذات حساسية شديدة للشروط الابتدائية [Hoppensteadt (1993)].

ومن الجوانب الشهيرة للمنظومات الديناميكية، والتي تسمى في بعض الأحيان جوارب بسيطة، النقاط الثابتة (Fixed points) والمدارات الدورية (periodic orbits) والمدارات الحدية (limit cycles).

أنواع الجاذب في المنظومات الديناميكية يوجد عدة أنواع من الجاذب في المنظومات الديناميكية، وهذه بعض الأنواع الشائعة:

1. الجاذب المستقر (Stable attractor): يتميز بأنه يجذب الحالات الابتدائية أو الاضطرابات ويوجهها نحو حالة مستقرة. عندما يتعرض النظام لاضطرابات صغيرة، يعود إلى الجاذب المستقر بعد وقت قصير. يمكن أن يكون الجاذب المستقر على شكل نقطة ثابتة (Fixed point)، أو دورة حدية (Limit cycle)، أو مجموعة من القيم المحددة.

2. الجاذب غير المستقر (Unstable attractor): يتميز بأنه يجذب الحالات الابتدائية لكنه ينحرف بعيداً عنها بمرور الوقت. عندما يتعرض النظام لاضطراب، يتحرك بعيداً عن الجاذب غير المستقر بدلاً من العودة إليه. مثال على الجاذب غير المستقر هو الجاذب الحر (Unstable limit cycle) الذي يتحرك بعيداً عن الدورة الحدية بمرور الوقت.

3. الجاذب المتعادل (Neutral attractor): يتميز بأنه يجذب الحالات الابتدائية ويحافظ عليها على نحو ثابت دون تغير. يمكن أن يكون الجاذب المتعادل على شكل خط أو سطح أو مجموعة من القيم المحددة.

4. الجاذب المعقد (Strange attractor): يتميز بسلوك معقد وغير منتظم، حيث يتحرك النظام في مجال ثنائي أو ثلاثي الأبعاد بشكل غير قابل للتنبؤ. يمكن أن يكون الجاذب المعقد على شكل هيكل هندسية معقدة مثل الطرازات الفر كتالية.

تتنوع أنواع الجاذب في المنظومات الديناميكية وقد يكون لكل نوع تأثير مختلف على سلوك النظام. يتم دراسة وتحليل أنواع الجاذب لفهم الاستقرار والتحكم في النظام وتطبيقاتها في مجالات مثل الفيزياء والهندسة والاقتصاد وعلوم الحاسوب.

مشكلة البحث:

تم عرض الأنواع الأكثر شيوعاً من التحويلات الخطية وتم تطبيق هذه التحويلات على عدة منظومات ديناميكية مختلفة الأبعاد لم يتم نكرها جميعها في هذا البحث. وتم عرض ودراسة منظومة لورنز ذات 4 أبعاد وشرح التغييرات التي طرأت على المنظومة بعد التحويلات وتم مناقشة أثر التحويلات في معامل لياپونوف الاعظمي.

مواد البحث وطرائقه:

هناك عدة أشكال للتحويلات الخطية على الدوال. بعض الأشكال الشائعة:

1. التحويلات الخطية البسيطة:

- جمع وطرح الدوال بثوابت حقيقية.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

- ضرب الدوال بثوابت حقيقية.
 - ضرب الدوال بمتغيرات حقيقية.
 - 2. التحويلات الخطية المعكوسة:
 - تحويل الدالة الأصلية إلى دالة معكوسة لها.
 - استخدام العمليات الرياضية المعكوسة مثل القسمة والجذر التربيعي والتراجع.
 - 3. التحويلات الخطية المتجانسة:
 - ضرب الدوال بمصفوفات متجانسة.
 - ضرب الدوال بمعاملات متجانسة.
 - 4. التحويلات الخطية المتغيرة:
 - تطبيق تحويلات خطية تعتمد على المتغيرات الأخرى في النظام.
 - تحويلات الانحدار الخطي التي تعتمد على المتغيرات المستقلة والتابعة.
- هذه هي بعض أشكال التحويلات الخطية الشائعة، ويمكن أن تتغير حسب السياق والتطبيق الذي يتم استخدامه فيها.

لنأخذ المنظومة الديناميكية المؤلفة من n معادلة تفاضلية من المرتبة الأولى التالية:

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (1)$$

حيث أن $x \in \mathbb{R}^n$ هو متجه ذو n بعد، $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ هي دالة قابلة للمفاضلة، t هو متحول الزمن.
بفرض أن x^0 هي نقطة من فضاء الموضع للمنظومة (1) وتقع ضمن مجال جذب أحد جواذب المنظومة وليكن A ، ولنرمز بالرمز $\phi_i(x^0)$ لتدفق هذه المنظومة الذي يحقق الشروط الابتدائية $\phi_0(x^0) = x^0$ ولنكن $\{E_i\}_{i=1}^n$ قاعدة لفضاء الموضع و $\langle \delta | \delta \rangle = 0$. عدد حقيقي موجب صغير بقدر كافٍ. يمكننا ضمن هذه الفرضيات الحصول على مجموعة من التدفقات ذات الاضطرابات الصغيرة للمنظومة (1)، وهي $\{\phi_i(x^0 + \delta E_i)\}_{i=1}^n$ ذات الشروط الابتدائية $\phi_0(x^0 + \delta E_i) = x^0 + \delta E_i$ حيث $1 \leq i \leq n$. وإذا رمزنا بالرمز $\delta_i(t)$ للمتجه الموجه من $\phi_i(x^0)$ إلى $\phi_i(x^0 + \delta E_i)$ في أي لحظة زمنية، فإن $\delta_i(0) = \delta E_i$ ويمكننا عندئذ إثبات أن

النهاية التالية

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \text{Log} \frac{\|\delta_i(t)\|}{\|\delta_i(0)\|}$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

موجودة عندما $\delta \rightarrow 0$ وهي ذاتها من أجل أي متجه وحدة توجيه E_i في فضاء الموضع. وتعرف هذه النهاية على أنها معامل ليابونوف الأعظمي ويرمز بها بالرمز λ_1 .

لنرمز بالرمز $\delta_{i,j}(t)$ لمتجه مساحة متوازي الأضلاع المشكل من أي متجهين مختلفين $\delta_i(t)$ و $\delta_j(t)$ عندئذ يعرف معامل ليابونوف الأسّي الثاني والذي يرمز له بالرمز λ_2 بالعلاقة:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \text{Log} \frac{\|\delta_{i,j}(t)\|}{\|\delta_{i,j}(0)\|}$$

حيث يمكننا أن نثبت أن هذه النهاية موجودة ووحيدة عندما $\delta \rightarrow 0$ ومن أجل أي دليلين مختلفين $1 \leq i < j \leq n$.

كما ويمكن بنفس الأسلوب تعريف الأحجام من المراتب الأعلى في فضاء الموضع والمنشأة على مجموعة جزئية من المتجهات $\delta_i(t)$ ومن ثم حساب المعدلات الأسية لتمدد أو تقلص هذه الأحجام. وأخيراً، إذا أخذنا الحجم متعدد الأبعاد $\|V_{1,2,\dots,n}(t)\|$ لمتوازي السطوح المنشأة على جميع المتجهات $\delta_i(t)$ ، حيث $1 \leq i \leq n$ ، فإن معامل ليابونوف الأسّي الأخير λ_n يعرف بالعلاقة

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \text{Log} \frac{\|V_{1,2,\dots,n}(t)\|}{\|V_{1,2,\dots,n}(0)\|}$$

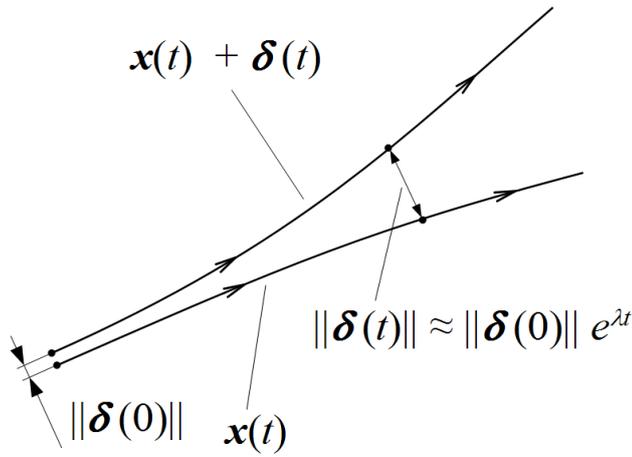
في هذا البحث قمنا باشتقاق مجموعة من المعادلات التفاضلية التي يمكن استخدامها في البحوث والتطبيقات لحساب معامل ليابونوف الأسّي الأعظمي من أجل أي منظومة ديناميكية ذات n بعد في الحالة العامة. كما وسنقوم باشتقاق معادلات أخرى تمكننا من تحديد طيف ليابونوف الكامل من المعاملات الأسية من أجل المنظومات الديناميكية المستمرة ذات الأبعاد الثلاثة. وسنقدم إضافةً لذلك مقارنة ما بين الطريقة التي قمنا بتطويرها والطرق الأخرى المعروفة والمستخدمة في حساب هذه المعاملات الأسية.

المعادلة الأساسية لحساب معامل ليابونوف الأسّي الأعظمي λ_1 :

لنأخذ المسارين $\phi_t(x^0)$ و $\phi_t(x^0 + \delta E_1)$ للمنظومة (1) المعطاة بالشروط الابتدائية $\phi_0(x^0) = x^0$ و $\phi_0(x^0 + \delta E_1) = x^0 + \delta E_1$ ، حيث $0 < \delta \ll 1$.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية



الشكل (1) جاذب المنظومة الديناميكية

وبهذا الشكل يمكن تعريف المتجه $\delta_1(t)$ في فضاء موضع المنظومة المعطاة بالعلاقة

$$\delta_1(t) = \phi_t(x^0 + \delta E_1) - \phi_t(x^0) \quad (2)$$

ولكن، عندما $\delta \rightarrow 0$ يصبح:

$$\phi_t(x^0 + \delta E_1) = \phi_t(x^0) + D_{x^0} \phi_t(x^0) \cdot \delta E_1$$

وبالتالي تصبح العلاقة (2) بالشكل:

$$\delta_1(t) = D_{x^0} \phi_t(x^0) \cdot \delta E_1 \quad (3)$$

الآن، باشتقاق طرفي العلاقة (2) بالنسبة للزمن وبالإستفادة من كون $\phi_t(x^0)$ و $\phi_t(x^0 + \delta E_1)$ هما حلول

للمعادلة التفاضلية (1) نجد أن:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta_1(t) &= F(\phi_t(x^0 + \delta E_1)) - F(\phi_t(x^0)) \\ &= F(\phi_t(x^0) + D_{x^0} \phi_t(x^0) \cdot \delta E_1) - F(\phi_t(x^0)) \\ &= F(\phi_t(x^0) + \delta_1(t)) - F(\phi_t(x^0)) \end{aligned}$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

بنشر الدالة F في جوار $\phi_t(x^0)$ نجد:

$$\frac{d}{dt}\delta_1(t) = \mathfrak{I}(\phi_t(x^0)) \cdot \delta_1(t)$$

حيث أن \mathfrak{I} هي المصفوفة الجاكوبية للدالة F . لكن بما أن $\phi_t(x^0)$ هي أحد حلول المعادلة التفاضلية (1)، فإنه يمكن كتابة المعادلة الأخيرة بالشكل:

$$\frac{d\delta_1}{dt} = \mathfrak{I}(x)\delta_1$$

الآن بتقسيم الطرفين على $\delta_1(t)$ ، وتعريف المتجه $L(t) = \frac{\delta_1(t)}{\delta}$ يمكن أن نكتب المعادلة السابقة بشكلها النظامي، حيث نجد أن:

$$L(0) = E_1 \frac{dL}{dt} = \mathfrak{I}(x) \cdot L \quad (4)$$

حيث أن L هو أي متجه وحدة في فضاء موضع المنظومة المعطاة. وبالتالي نستنتج أنه يمكن حساب معامل ليابونوف الأسّي الأعظمي من خلال حل جملة المعادلتين (1) و (4) معاً ومن ثم إيجاد قيمة المعامل λ_1 من العلاقة التالية:

$$\lambda_1 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \text{Log} \|L(t)\| \quad (5)$$

طيف ليابونوف للمنظومات الديناميكية ثلاثية الأبعاد:

يمكن حساب قيمة معامل ليابونوف الأسّي الأعظمي باستخدام العلاقة (5) بعد مكاملة المنظومتين (1) و (4) بشكلٍ متزامن معاً ولحساب معامل ليابونوف الأسّي الثاني λ_2 . نحتاج إلى النظر إلى التغير في مساحة متوازي الأضلاع المتشكل من تغيرات متجهي اضطراب ابتدائيين متعامدين $\delta_1(0)$ و $\delta_2(0)$ في فضاء موضع المنظومة.

وبما أن مساحة متوازي الأضلاع المتشكل من المتجهين $\delta_1(t)$ و $\delta_2(t)$ المنبثقين من نفس النقطة $x(t)$ يعطى بالعلاقة $\|\delta_1(t) \times \delta_2(t)\|$ ، فإن علينا الأخذ بعين الاعتبار تغير المتجه $\delta_1(t) \times \delta_2(t)$ ، وبهذا الشكل نجد أن:

$$\begin{aligned} \frac{d(\delta_1(t) \times \delta_2(t))}{dt} &= \frac{d(\delta_1(t))}{dt} \times \delta_2(t) + \delta_1(t) \times \frac{d(\delta_2(t))}{dt} \\ &= (\mathfrak{I}(x) \cdot \delta_1(t)) \times \delta_2(t) + \delta_1(t) \times (\mathfrak{I}(x) \cdot \delta_2(t)) \\ &= \{\Re(\mathfrak{I}(x))I - \mathfrak{I}^T(x)\} (\delta_1(t) \times \delta_2(t)) \end{aligned}$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

حيث أن $\Re(\mathfrak{I}(x))$ هو أثر المصفوفة الجاكوبية $\mathfrak{I}(x)$ (مجموع عناصر القطر الرئيسي)، $\mathfrak{I}^T(x)$ هو منقول المصفوفة $\mathfrak{I}(x)$ و I هي مصفوفة الوحدة.

ويتقسيم الطرفين على $\|\delta_1(0) \times \delta_2(0)\|$ ، وتعريف المتجه

$$S(t) = \frac{\delta_1(t) \times \delta_2(t)}{\|\delta_1(0) \times \delta_2(0)\|}$$

تصبح العلاقة السابقة بالشكل:

$$\begin{cases} \frac{ds}{dt} = \{\Re(\mathfrak{I}(x))I - \mathfrak{I}^T(x)\}.S \\ S(0) = E_2 \end{cases} \quad (8)$$

حيث أن E_2 هو متجه وحدة في فضاء الموضع عمودي على متجه الوحدة E_1 . وهكذا فإنه يمكن حساب معامل ليايونوف الأسي الثاني λ_2 ، وذلك بعد حساب معامل ليايونوف λ_1 من العلاقة:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \text{Log} \|S(t)\| \quad (9)$$

وأخيراً، لحساب معامل ليايونوف الأسي الثالث والأخير λ_3 للمنظومة الديناميكية ثلاثية الأبعاد. سندرس التغير في حجم متوازي السطوح المتشكل من تغير ثلاث متجهات اضطراب ابتدائية في فضاء الموضع متعامدة مثنى مثنى $\delta_1(0), \delta_2(0), \delta_3(0)$.

إن حجم متوازي السطوح المتشكل من المتجهات الثلاثة $(\delta_1(t) \times \delta_2(t)).\delta_3(t)$

وبالتالي يتوجب علينا هنا أن نعتبر التغير في العدد الحقيقي الناتج عن الجداء المختلط

$(\delta_1(t) \times \delta_2(t)).\delta_3(t)$ للمتجهات الثلاثة المعطاة. ولذلك سنقوم بحساب مشتق هذا الجداء المختلط كما يلي:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}((\delta_1 \times \delta_2).\delta_3) &= \frac{d(\delta_1 \times \delta_2)}{dt}.\delta_3 + (\delta_1 \times \delta_2) \frac{d\delta_3}{dt} \\ &= \Re(\mathfrak{I}(x))((\delta_1 \times \delta_2).\delta_3) - (\mathfrak{I}^T(x)(\delta_1 \times \delta_2).\delta_3) + (\delta_1 \times \delta_2)(\mathfrak{I}(x).\delta_3) \end{aligned}$$

وبما أن $A(\mathfrak{I}(x).B) + (\mathfrak{I}^T(x).A).B = 0$ ، لذلك تصبح العلاقة السابقة بالشكل

$$\frac{d}{dt}((\delta_1 \times \delta_2).\delta_3) = \Re(\mathfrak{I}(x))((\delta_1 \times \delta_2).\delta_3)$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

وبتعريف المقدار السلمي

$$V(t_0) = 1 \frac{dV}{dt} = \Re(\mathfrak{I}(x))V \quad (10)$$

وهكذا فإننا نلاحظ أنه يمكن حساب معامل ليايونوف الثالث والأخير λ_3 لمنظومة ديناميكية ثلاثية الأبعاد بعد حساب المعاملين λ_1, λ_2 باستخدام العلاقة:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \text{Log} |V(t)| \quad (11)$$

وهكذا نستنتج أنه لحساب طيف ليايونوف الكامل لمنظومة ديناميكية ثلاثية الأبعاد من الشكل (1) يتوجب علينا حل جملة المعادلات التفاضلية التالية معاً

$$(12) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = F(x) \quad ; x(t_0) = x_0 \\ \frac{dL}{dt} = \mathfrak{I}(x)L \quad ; L(t_0) = E_1 \\ \frac{ds}{dt} = \{\Re(\mathfrak{I}(x))I - \mathfrak{I}^T(x)\}.S \quad ; S(0) = E_2 \\ \frac{dV}{dt} = \Re(\mathfrak{I}(x))V \quad ; V(t_0) = 1 \end{array} \right.$$

إن هذه المنظومة هي في الحالة العامة منظومة من عشرة معادلات تفاضلية سلمية بعشرة متحولات، وهذا يعني أننا قد تمكنا من خفض عدد المعادلات التفاضلية المعطاة في المعادلة التفاضلية اللازمة للحصول على طيف ليايونوف الكامل للمنظومة المعطاة.

وبحل جملة المعادلات التفاضلية في المنظومة (12) معاً ومن ثم استخدام العلاقات

(5) و (9) و (11)، يمكننا حساب طيف ليايونوف $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\}$ لأي منظومة ديناميكية ثلاثية الأبعاد.

منظومة لورنز الديناميكية ذات 4 ابعاد:

يعطى النموذج بالشكل:

$$\dot{x} = a(y - x)$$

$$\dot{y} = cx - y - xz$$

$$\dot{z} = -bz + xy$$

$$\dot{w} = -k_1x - k_2y$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 آب 2024
دمشق - سورية

مع العلم أن: $a=10$, $b = \frac{8}{3}$, $c = 28$, $k_1 = 2$, $k_3 = 7.5$

حيث أن a, b, c, k_1, k_2 وسطاء للمنظومة.

بتطبيق العلاقات (12) نجد ما يلي:

$$\frac{dx}{dt} = 10y - 10x$$

$$\frac{dy}{dt} = 28x - y - xz + w$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{8}{3}z + xy$$

$$\frac{dw}{dt} = -2x + 7.5y$$

$$\frac{dx_5}{dt} = -10x_5 + 10x_6$$

$$\frac{dx_6}{dt} = 28x_5 - zx_5 - x_6 - xx_7 + x_8$$

$$\frac{dx_7}{dt} = yx_5 + xx_6 - \frac{8}{3}x_7$$

$$\frac{dx_8}{dt} = -2x_5 + 7.5x_6$$

بحل جملة المعادلات التفاضلية السابقة باستخدام برنامج ماثماتيكا. ويتطبيق العلاقة (5) نجد:

$$\lambda_1 = 0.0259 > 0$$

تطبيق التحويلات الخطية على المنظومة:

نعلم أن التحويلات الخطية تعطى بالشكل $X = ax + b$; $a, b = const$

ولنفرض التحويل الخطي التالي:

$$x = X + 1$$

$$y = Y + 2$$

$$z = Z + 3$$

$$w = W + 4$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

نطبق هذا التحويل الخطي على المعادلات التفاضلية التي تمثل منظومة لورنز الديناميكية. والتي تصبح بالشكل التالي:

$$X' = 10X_2 - 10X_1 + 10$$

$$Y' = 25X_1 - X_2 - X_1X_3 - X_3 + X_4 + 27$$

$$Z' = -\frac{8}{3}X_3 + X_1X_2 + 2X_1 + X_2 - 6$$

$$W' = -2X_1 + 7.5X_2 + 13$$

بتطبيق العلاقات (4) و (5) نجد ما يلي:

$$\frac{dX}{dt} = 10X_2 - 10X_1 + 10$$

$$\frac{dY}{dt} = 25X_1 - X_2 - X_1X_3 - X_3 + X_4 + 27$$

$$\frac{dZ}{dt} = -\frac{8}{3}X_3 + X_1X_2 + 2X_1 + X_2 - 6$$

$$\frac{dW}{dt} = -2X_1 + 7.5X_2 + 13$$

$$\frac{dX_5}{dt} = -10X_5 + 10X_6$$

$$\frac{dX_6}{dt} = 25X_5 - X_3X_5 - X_6 - X_1X_7 - X_7 + X_8$$

$$\frac{dX_7}{dt} = X_2X_5 + 2X_5 + X_1X_6 + X_6 - \frac{8}{3}X_7$$

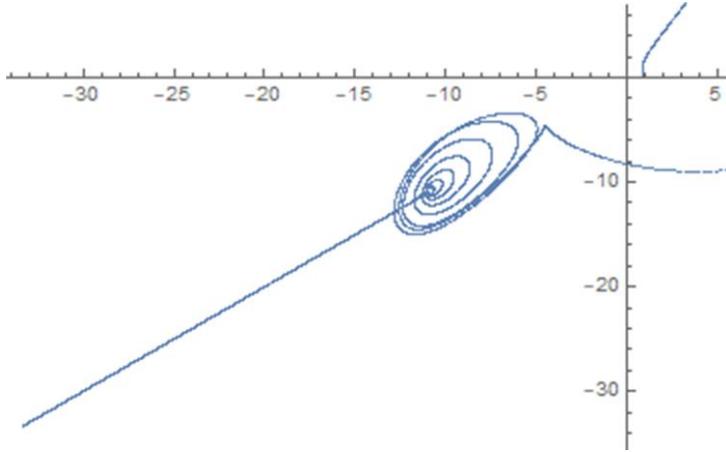
$$\frac{dX_8}{dt} = -2X_5 + 7.5X_6$$

بحل جملة المعادلات التفاضلية السابقة باستخدام برنامج ماثماتيكا. وبتطبيق العلاقة (5)

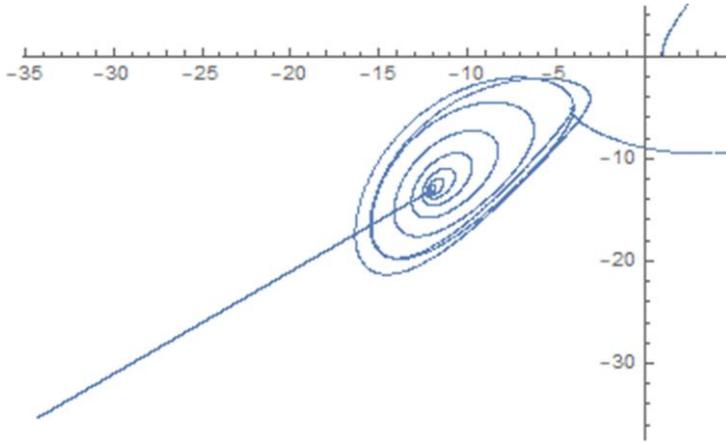
$$\lambda_1 = 0.0426 > 0$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية



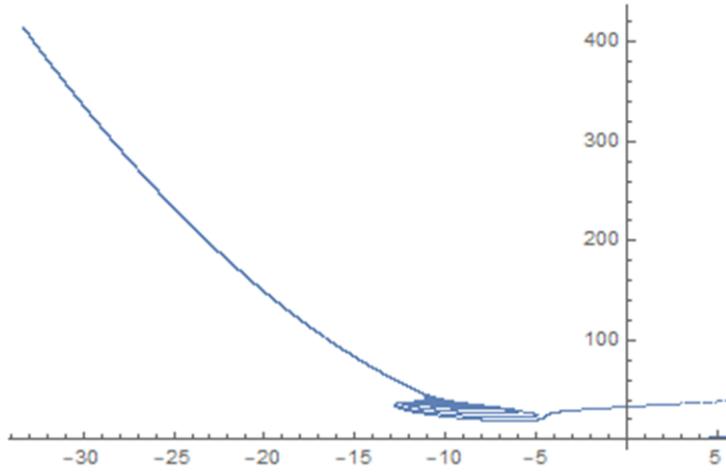
الشكل (2) مسطلي الجاذب الفوضوي لمنظومة لورنز على المستويين الإحداثيين (x, y) قبل التحويل



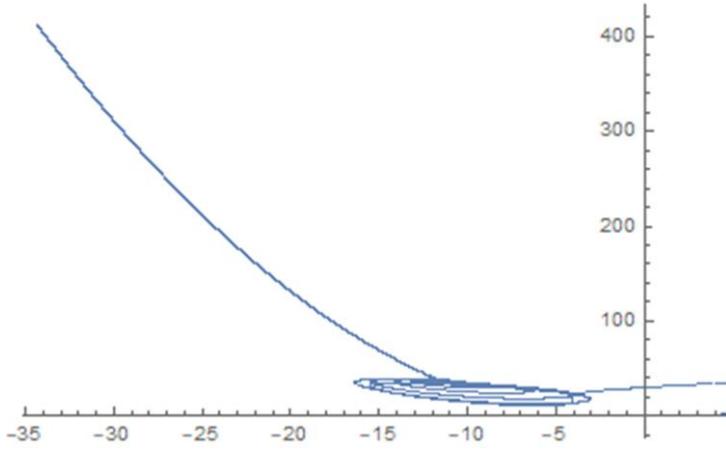
الشكل (3) مسطلي الجاذب الفوضوي لمنظومة لورنز على المستويين الإحداثيين (x, y) بعد التحويل



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية



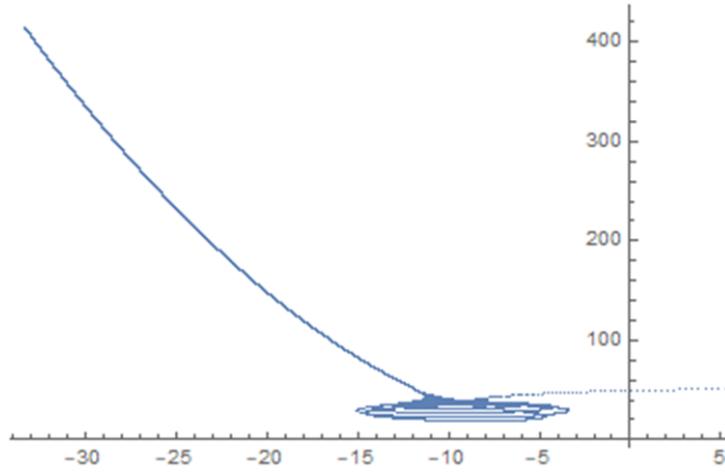
الشكل (4) مسطحي الجاذب الفوضوي لمنظومة لورنز على المستويين الإحداثيين (x, z) قبل التحويل



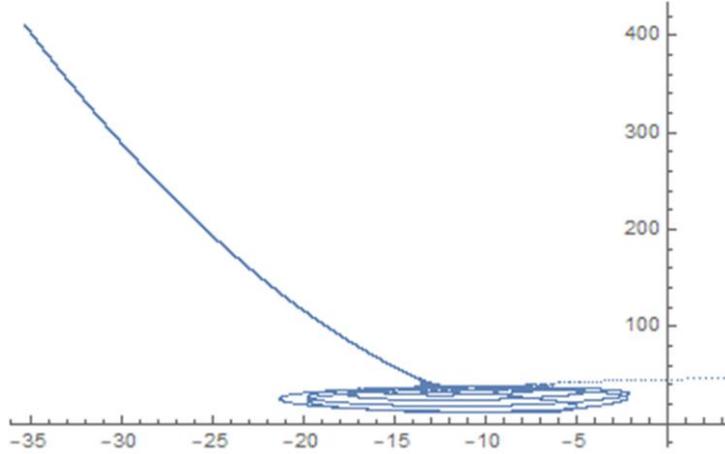
الشكل (5) مسطحي الجاذب الفوضوي لمنظومة لورنز على المستويين الإحداثيين (x, z) بعد التحويل



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية



الشكل (6) مسطحي الجاذب الفوضوي لمنظومة لورنز على المستويين الإحداثيين (y, z) قبل التحويل



الشكل (7) مسطحي الجاذب الفوضوي لمنظومة لورنز على المستويين الإحداثيين (y, z) بعد التحويل



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

نتائج البحث:

تأثير التحويلات الخطية على المعادلات التفاضلية يعتمد على نوع التحويل والمعادلة التفاضلية المعطاة. ومع ذلك، هناك بعض التأثيرات العامة التي يمكن أن تحدث نتيجة لتطبيق التحويلات الخطية على المعادلات التفاضلية:

1. تغيير في الشكل العام للمعادلة: التحويلات الخطية قد تؤدي إلى تغيير في الشكل العام للمعادلة التفاضلية، مما قد يسهل حل المعادلة أو يجعلها أكثر تعقيداً.
2. تغيير في الظروف الحدية: التحويلات الخطية قد تؤدي إلى تغيير في الظروف الحدية للمعادلة التفاضلية، مما يمكن أن يؤثر على الحلول الممكنة والخصائص الأخرى للمعادلة.
3. تبسيط المعادلة: في بعض الحالات، قد تساعد التحويلات الخطية في تبسيط المعادلة التفاضلية، مما يجعلها أكثر قابلية للحل.
4. معرفة قيمة معامل لياپونوف الأسي الأعظمي كافية لتحديد الديناميكية الفوضوية من الديناميكيات اللافوضوية.
5. التحويلات الخطية يمكن أن تؤثر على معامل لياپونوف الأعظمي. التحويلات الخطية يمكن أن تغير الخصائص الديناميكية للنظام وبالتالي تؤثر على قيمة معامل لياپونوف الأعظمي. قد يزداد أو ينقص قيمة المعامل لياپونوف الأعظمي بناءً على نوع التحويل وتأثيره على سرعة التقارب أو التباعد بين المسارات المجاورة.

المقترحات والتوصيات:

في حالة المنظومات الديناميكية الفوضوية، يفضل استخدام تقنيات خاصة بالنمذجة والتحليل الفوضوي، مثل تحليل الفوضوية الاحتمالية والتحليل الفوضوي الإحصائي، لفهم وتحليل سلوك المنظومة بشكل أفضل.

المراجع العلمية:

- [1] M. Ali and L. M. Saha (2005): Local Lyapunov exponent and characteristics of fixed/ periodic points embedded within a chaotic, J. Zhejiang Univ. Sci.,6A (4),296-304.
- [2] G. Litak, M. Borowiec, M. Ali, L. M. Saha and M. Friswell (2007) Pulsive feedback control of a quarter car forestd by a road profile. 33,1672-1676.
- [3] Sandri, M., 1996.Numerical calculation of Lyapunov Exponent, The Mathematical,6(3):78-84.
- [4] Abdulla Azamov, Leonid Bunimovich, Akhtam Dzhililov, Hong-Kun Zhang Editors, (2017) Differential Equations and Dynamical Systems.
- [5] Riccardo Barbieri, Enzo Pasquale Scilingo, Gaetano Valenza Editors (2017) Complexity and Nonlinearity in Cardiovascular Signals.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

- [6] Lawrence Perko, (2000). Differential Equations and Dynamical Systems.
- [7] Stephen Lynch, (2017). Dynamical Systems with Applications using Mathematica (Second Edition).
- [8] Pedro Duarte, Silviu Klein. (2016). Lyapunov Exponents of linear Cocycles.
- [9] Leonid Shaikhet, (2013). Lyapunov Functionals and Stability of Stochastic Functional Differential Equations.
- [10] Christiansen, P. L., S. rensen, M. P. and Scott, A. C., 2000. Nonlinear Science at the Dawn of the 21st Century. Springer-Verlag, Berlin.
- [11] Cross, M. C., Zumdieck, A., Lifshits, R. and Rogers, J. L., 2004. Synchronization by Nonlinear Frequency Pulling. *Phys. Rev. Lett.*, **93** (22): (224101)1-4.
- [12] Epureanu, B. and Dowel, E., 2000. Optimal Multidimensional OGY Controller. *Physica D*, **139** (1,2): 87-96.
- [13] Erjaee, G. H., Atabakzade, M. H. and Saha, L. M., 2004. Interesting Synchronization-Like Behavior. *Int. J. Bifurcation and Chaos*, **14** (4): 1447-1453.
- [14] Feng, B. and Hu, R., 2003. A Survey on Homoclinic and Heteroclinic Orbits. *Applied Mathematics E-Notes*, **3**: 16-37
- [15] Gao, Y. and Zhang, H., 2003. An Adaptive Strategy for Controlling Chaotic System. *J. Zhejiang Univ. SCIENCE*, **4** (3): 258-263.
- [16] Grond, F., and Diebner H. H., 2005. Local Lyapunov Exponents for Dissipative Continuous Systems. *Chaos, Solitons and Fractals* **23** (5): 1809-1817.
- [17] Grond, F., and Diebner H. H., 2005. Local Lyapunov Exponents for Dissipative Continuous Systems. *Chaos, Solitons and Fractals* **23** (5): 1809-1817.
- [18] Grond, F., Diebner, H.H., Sahle, S., Mathias, A., Fischer S., and Rossler, E., 2003. A Robust, Locally Interpretable Algorithm for Lyapunov Exponents. *Chaos, Solitons and Fractals* **16** (5): 841-852.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

ظمر كمون ريس في الفضاء (RIS) و الخصائص التكاملية لفضاءات الكمون

الملخص

ندرس في هذا المقال الخصائص التكاملية لنواة ريس المعممة ، و يتم تمييز سلوك هذه النواة في المبدأ من خلال النقطة الشاذة التي تملك شكل القوة $|x|^{\alpha-n}$. الهدف العام في هذا البحث هو ظمر فضاء الكمون في الفضاء RIS الذي يتوافق مع فضاء لورنتز القابل للقياس ، و الحصول على الوصف الدقيق للظمر في الفضاء الأمثل (الأصغري).

المقدمة

تلعب فضاءات الدوال دوراً مهماً في حل العديد من المسائل النظرية و التطبيقية في الرياضيات حيث درس الرياضيون أمثال نيكولسكي , بيسوف , امانوف , غولدمان..... خواص هذه الدوال وتطبيقاتها في نظرية التفاضل و المعادلات التفاضلية و قد تمكنا من بناء نظرية الظمر (Embedding) في فضاءات الكمون (Potential) الكلاسيكية و قد تم استكمال هذه الدراسة في تطوير نظرية الفضاءات المعممة مثل فضاءات ببسل و ريس ولورنتز وأورليش .

في عام 2010 قام (M. L. Goldman) بدراسة فضاء الكمون على الفضاء الإقليدي نوني البعد على الفضاء RIS و دراسة كمون ببسل و ريس المعممتين كحالة خاصة من الفضاء RIS . [6]

في عام 2013 قام (M. L. Goldman , P. P. Zabreiko) بدراسة فضاء باناخ الذي يحتوي على مخروط كفي من الدوال القياسية الموجبة و ذلك بالنسبة للدالة شبه منظمة التي تنتمي إلى الفضاء الأمثل مع الأخذ بعين الاعتبار الفضاء RIS و مقارنة النتائج. [7]

في عام 2016 قام (Э. Г. Бахтигареева, М. Л. Гольдман) بدراسة فضاء باناخ الأمثل الذي يحتوي على مخروط من الدوال الموجبة مع خواص الترتيب، و تم إيجاد النتائج العامة للقيم المثلى المتوافقة مع علاقة الترتيب. والسؤال المطروح هو إيجاد التغطية المرتبة و المتكافئة لهذه المخاريط. [2]

في عام 2018 قام (Бокаев Н.А., Гольдман М.Л., Каршыгина Г.Ж) بدراسة التغطية المرتبة و المتكافئة لمخروطين من الدوال الموجبة مع خواص الترتيب المتعلقة بكمون ببسل و ريس المعممة [3]. إن هذا البحث هو استمرار للدراسة في [8,9] حيث قمنا بإيجاد التغطية المرتبة لمخاريط الدوال $K(T); M(T); L(T)$ و قمنا بإيجاد التغطية المتكافئة (المتبادلة) لهذه المخاريط مع خواص الترتيب و ثم ظمر هذه المخاريط في الفضاء RIS ، و هنا نقوم بدراسة فضاءات كمون ريس على الفضاء الإقليدي نوني البعد و المبنية على اساس الفضاء RIS بالإعتماد على نواة الكمون G و الدالة الموجبة و المتناقص Φ ، أي دراسة فضاء كمون ريس المعمم. و بشكل خاص في الفضاء RIS نختار فضاء لورنتز \wedge^p حيث $1 \leq p < \infty$ و الحصول على شروط ظمر كمون ريس في الفضاء RIS باستخدام مؤثر الظمر الذي تم وضعه من قبل غولدمان [6].



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

التعاريف الأساسية و الشروط الرئيسية :

في هذا العمل $E = E(R^n)$ فضاء (RIS) و $E' = E'(R^n)$ هو الفضاء المرافق للفضاء E وهو فضاء (RIS) يحقق :

$$\|g\|_{E'} = \sup \left\{ \int_{R^n} |f \cdot g| d\mu ; f \in E ; \|f\|_{E'} \leq 1 \right\}$$

ومن أجل أي فضاءين $E(R^n)$ و $E'(R^n)$ نجد أن الفضاءين $\tilde{E} = \tilde{E}(R_+)$ و $\tilde{E}' = \tilde{E}'(R_+)$ يحققان خاصية ليكسمبورغ [1] وهما فضاءين RIS حيث :

$$\|f\|_E = \|f^*\|_{\tilde{E}} , \quad \|g\|_{E'} = \|g^*\|_{\tilde{E}'}$$

حيث f^* هي الدالة اللامتغيرة والمعاد ترتيبها للدالة f وهي دالة موجبة متناقصة مستمرة من اليمين على

$$R_+ = (0, \infty) \text{ ومتساوية بالقياس مع } f$$

$$\mu_n\{x \in R^n ; |f(y)| > y\} = \mu_1\{t \in R_+ ; |f^*(t)| > y\} ; y \in R_+$$

حيث μ - قياس ليبيغ

سندرس فضاء الكمون على الفضاء الإقليدي نوني البعد ويعرف بالشكل [5] :

$$H_E^G(R^n) = \{u = G * f ; f \in E(R^n)\} \quad (1)$$

حيث E هو الفضاء RIS و G نواة الكمون والنظيم يعطى بالعلاقة :

$$\|u\|_{H_E^G} = \inf\{\|f\|_E ; f \in E(R^n) ; G * f = u\}$$

يطلق على النواة G بالقبول اذا تحقق الشرط

$$G \in L_1(R^n) + E'(R^n)$$

ويعرف الالتفاف $G * f$ بالشكل :



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$(G * f)(x) = (2\pi)^{\frac{-n}{2}} \int_{R^n} G(x-y)f(y)dy$$

تعريف 1: [7] بفرض لدينا δ دالة موجبة قابلة للقياس عندئذ :

$$\Delta(s) = \int_0^s \delta(t) dt$$

$$f^{**}_{\delta}(t) = \frac{1}{\Delta(t)} \int_0^t f^*(\tau) \delta(\tau) d\tau ; t \in R_+$$

وفي حال $\delta = 1$ فإن الدالة الأعظمية تعطى بالشكل :

$$f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds ; t > 0 \quad (2)$$

تعريف 2: [7] يقال إن الدالة $\emptyset: (0, \infty) \rightarrow R_+$ حيث $R \in (0, \infty)$ تنتمي الى الصف $\mathfrak{Z}_n(R)$ إذا تحقق الشرطان الآتيان :

1- \emptyset دالة متناقصة ومستمرة على المجال $(0, \infty)$

2- يوجد ثابت $c \in R_+$ بحيث يتحقق :

$$\int_0^r \emptyset(p) p^{n-1} dp \leq c \emptyset(r) r^n ; r > 0$$

حيث :

$$\varphi(\tau) = \emptyset \left(\left(\frac{\tau}{V_n} \right)^{\frac{1}{n}} \right) \quad (3)$$

V_n هو حجم كرة الوحدة في R^n . ونلاحظ أنه إذا كان $\emptyset \in \mathfrak{Z}_n(\infty)$ فإن $\varphi \in \mathfrak{Z}_1(\infty)$

وكذلك لأجل الدالة φ فإن العلاقة الآتية محققة

$$\int_0^r \varphi(p) dp \cong r\varphi(r) ; r > 0 \quad (4)$$

تعريف 3: بفرض أن $\emptyset \in \mathfrak{Z}_n(\infty)$ عندئذ يقال ان $G \in S_{\infty}^0(\emptyset)$ اذا تحقق $G(x) \cong \emptyset(p)$ بحيث

$$p = |x| \in R_+$$

تعريف 4: بفرض $G \in S_{\infty}^0(\emptyset)$ عندئذ الكمون $H_E^G(R^n)$ يدعى بكمون ريس المعمم (أو كمون ريس الكلاسيكي)

وفي هذه الحالة



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 آب 2024
دمشق - سورية

$$\phi(\rho) = \rho^{\alpha-n}; 0 < \alpha < n$$

ولتكن الدالة

$$f_\phi(t, \tau) = \min\{\phi(t), \phi(\tau)\} \quad (5)$$

ولنعرف المؤثر $R_{\phi, \infty}: \tilde{E}(R_+) \rightarrow \tilde{X}(R_+)$ بالشكل الآتي [6]:

$$R_{\phi, \infty}[g](t) = \int_0^\infty f_\phi(t, \tau)g(\tau)d\tau; g \in \tilde{E}(R_+)$$

الصيغة لظمر الكمون في الفضاء (RIS) [3,4]

$$H_E^G(R^n) \subset X(R^n) \quad (7)$$

المؤثر $R_{\phi, \infty}$ محدود من أجل الظمر في كمون ريس المعمم (7) إضافة الى ذلك الفضاء (RIS) هو الامثل لأجل (7).

ولیکن $X_0 = X_0(R^n)$ فضاء (RIS) يحقق (7) عندئذ فإن $X = X_0$, ومن أجل أي فضاء (RIS) فإن الظمر في (7) يحقق $X_0 \subset X$ ويكافئ الصيغة:

$$\|f\|_{\tilde{X}_0(R_+)} = \sup \left\{ \int_0^\infty f^*g^*dt; g \in L_0(R_+); \|R_{\phi, \infty}[g^*]\|_{\tilde{E}(R_+)} \leq 1 \right\} \quad (8)$$

حيث $L_0(R_+)$ مجموعة كل الدوال القیوسة والمنتهية في كل مكان تقريبا على R_+

لتكن u دالة موجبة قابلة للتكامل على $(0, \infty)$ وتسمى بالوزن. ولتكن الدالة

$$U(s) = \int_0^s u(t)dt \quad (9)$$

تعريف 5: لیکن $\Lambda^p(u)$ و $\Gamma^p(u)$ فضائي لورنتز مع u عندئذ يدعى الفضاء منظماً و نظيمه

$$\|f\|_{\Lambda^p(u)} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty (f^{*p}(t)u(t)dt) \right)^{\frac{1}{p}}; 1 \leq p < \infty \\ \text{ess sup}_{t \in (0, \infty)} \{f^*(t)u(t)\}; p = \infty \end{cases} \quad (10)$$

$$\|f\|_{\Gamma^p(u)} = \begin{cases} \left(\int_0^\infty (f^{**p}(t)u(t)dt) \right)^{\frac{1}{p}}; 1 \leq p < \infty \\ \text{ess sup}_{t \in (0, \infty)} \{f^*(t)u(t)\}; p = \infty \end{cases} \quad (11)$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

Γ^∞ تسمى فضاء مارتينيكيف

إن فضاء لورنتز المرافق هو $\Lambda^p(u)$ ويعطى بالشكل [6]

$$\Lambda^p(u)' = \begin{cases} \Gamma^\infty\left(\frac{t}{U(t)}\right); p = 1 \\ \Gamma^{p'}\left(\frac{t^{p'}u(t)}{U^{p'}(t)}\right); 1 < p < \infty \\ \Lambda^1\left(\frac{1}{\text{ess sup}_{0 < s < t} u(s)}\right); p = \infty \end{cases} \quad (12)$$

X فضاء باناخ الأمثل

$f_1, f_2 \in X$ دوال موجبة عندئذ ينتج العلاقة الآتية :

$$\|f_1 + f_2\|_X \cong \|f_1\|_X + \|f_2\|_X$$

القسم الرئيسي :

إن

$$\widetilde{E}_0(R_+) = \{g \in \widetilde{E}(R_+); 0 \leq g^\downarrow; g(t+0) = g(t); t \in R_+\}$$

تمهيدية 1 :

$$\|R_{\varphi, \infty}\|_{\widetilde{E}(R_+) \rightarrow \widetilde{X}(R_+)} = \|R_{\varphi, \infty}\|_{\widetilde{E}_0(R_+) \rightarrow \widetilde{X}(R_+)} \quad (13)$$

البرهان : يكفي أن نبرهن صحة المتراجحة :

$$\|R_{\varphi, \infty}\|_{\widetilde{E}(R_+) \rightarrow \widetilde{X}(R_+)} \leq \|R_{\varphi, \infty}\|_{\widetilde{E}_0(R_+) \rightarrow \widetilde{X}(R_+)}$$

والاتجاه المعاكس من المتراجحة السابقة محققة دوما

بفرض $g \in \widetilde{E}(R_+)$ اختياري

$$\begin{aligned} |R_{\varphi, \infty}[g](t)| &= \left| \int_0^\infty f_\varphi(t, \tau)g(\tau)d\tau \right| \leq \int_0^\infty f_\varphi(t, \tau)g(\tau)d\tau \leq \int_0^\infty f_\varphi(t, \tau)g^*(\tau)d\tau \\ &= R_{\varphi, \tau}[g^*](t) \end{aligned}$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

هنا استخدمنا متراجحة هاردي وقمنا بتثبيت t, τ اختياري

عندئذ من أجل $g \in \tilde{E}(R_+)$ فإن $g^* \in \tilde{E}_0(R_+)$ ويتحقق

$$\|R_{\varphi, \infty}[g]\|_{\tilde{X}(R_+)} \leq \|R_{\varphi, \infty}[g^*]\|_{\tilde{X}(R_+)} \leq \|R_{\varphi, \infty}\|_{\tilde{E}_0(R_+) \rightarrow \tilde{X}(R_+)} \|g^*\|_{\tilde{E}_0(R_+)}$$

ومنه نجد :

$$\|R_{\varphi, \infty}\|_{E(R_+) \rightarrow \tilde{X}(R_+)} \leq \|R_{\varphi, \infty}\|_{\tilde{E}_0(R_+) \rightarrow \tilde{X}(R_+)}$$

وهذا يبرهن تحقق العلاقة (13)

تمهيدية 2 :

$$R_{\varphi, \infty}[g^*] \cong R_{\varphi, \infty}^{**}[g^*] \quad (14)$$

البرهان:

1- إن العلاقة $R_{\varphi, \infty}^*[g^*] = R_{\varphi, \infty}[g^*]$ حيث g^* هي الدالة المتناقصة والمعاد ترتيبها للدالة g

وإن الدالة φ مستمرة ومستمرة مطلقا بالنسبة لتكامل ليبيغ $R_{\varphi, \infty}[g^*]$

2- ولنبرهن أن $R_{\varphi, \infty}[g^*] \cong R_{\varphi, \infty}^{**}[g^*]$

$$R_{\varphi, \infty}^{**}[g^*](t) = \frac{1}{t} \int_0^t R_{\varphi, \infty}^*[g^*](s) ds = \frac{1}{t} \int_0^t \left(\int_0^\infty f_\varphi(s, \tau) g^*(\tau) d\tau \right) ds$$

إضافة الى ذلك من تعريف f_φ (5)

$$R_{\varphi, \infty}^{**}[g^*] = \frac{1}{t} \int_0^t \left[\varphi(s) \int_0^s g^*(\tau) d\tau + \int_0^\infty \varphi(\tau) g^*(\tau) d\tau \right] ds = I_1 + I_2 \quad (15)$$

حيث :

$$I_1 = \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(s) \int_0^s g^*(\tau) d\tau ds$$

$$I_2 = \frac{1}{t} \int_0^t \int_0^\infty \varphi(\tau) g^*(\tau) d\tau ds$$

$$I_1 = \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(s) \int_0^s g^*(\tau) d\tau ds =$$

$$= \frac{1}{t} \int_0^t \int_\tau^t \varphi(s) g^*(\tau) ds d\tau = \frac{1}{t} \int_0^t g^*(\tau) \left(\int_\tau^t \varphi(s) ds \right) d\tau$$

هنا استخدمنا مبرهنة فوبيني وتغيير حدود التكامل بالنسبة ل s و τ



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{t} \int_0^t \int_0^\infty \varphi(\tau) g^*(\tau) d\tau ds I_2 \\ &= \frac{1}{t} \int_0^t \tau \varphi(\tau) g^*(\tau) d\tau + \frac{1}{t} \int_0^t ds \int_t^\infty \varphi(\tau) g^*(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{t} \int_0^t \tau \varphi(\tau) g^*(\tau) d\tau + \frac{1}{t} \int_t^\infty \varphi(\tau) g^*(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{t} \int_0^t \tau \varphi(\tau) g^*(\tau) d\tau + \int_t^\infty \varphi(\tau) g^*(\tau) d\tau \end{aligned}$$

ولكن $\tau \varphi(\tau) \cong \int_0^t \varphi(s) ds$ ومنه :

$$I_2 \cong \frac{1}{t} \int_0^t \left(\int_0^\tau \varphi(s) ds \right) g^*(\tau) d\tau + \int_t^\infty \varphi(\tau) g^*(\tau) d\tau$$

عندئذ ومن العلاقة (15) نحصل على :

$$\begin{aligned} R_{\varphi, \infty}^{**}[g^*](t) &= I_1 + I_2 \\ &\cong \frac{1}{t} \int_0^t g^*(\tau) \left(\int_\tau^t \varphi(s) ds + \int_0^\tau \varphi(s) ds \right) d\tau + \int_t^\infty \varphi(\tau) g^*(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{t} \int_0^t \varphi(s) ds \int_0^t g^*(\tau) d\tau + \int_t^\infty \varphi(\tau) g^*(\tau) d\tau \\ &\cong \varphi(t) \int_0^t g^*(\tau) d\tau + \int_t^\infty \varphi(\tau) g^*(\tau) d\tau = R_{\varphi, \infty}[g^*](t) \end{aligned}$$

ومنه تم البرهان.

الخصائص التكاملية لكمون ريس المعمم:

مبرهنة: لنكن $1 < p < \infty$; $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ والدوال u و V تعرف بالعلاقة (9) ولنضع :

$$v(t) = \frac{t^{2p'} u(t) \varphi^{p'}(t)}{V^{p'}(t)}, V(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau$$

إضافة الى ذلك

$$B = \sup_{r>0} \left(\int_0^r \frac{t^{p'} u(t)}{V^{p'}(t)} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \cdot \left(\int_r^\infty \frac{V^p(t)}{t^{2p} u^{p'}(t)} dt \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty \quad (16)$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

عندئذ الفضاء الأمثل (RIS) $H_{\lambda^p(u)}^G$ مطمور في $X(R^n)$ أي :

$$H_{\lambda^p(u)}^G(R^n) \rightarrow X(R^n)$$

وهذا يعني

$$\|f\|_{\bar{X}_0(R_+)} \cong \|f\|_{\Gamma^p(w)} \quad (17)$$

حيث :

$$w(t) = \frac{t^{p+p'-1}V(t) \int_t^\infty \tau^{-p'}v(\tau)d\tau}{(V(t) + t^{p'} \int_t^\infty \tau^{-p'}v(\tau)d\tau)^{p+1}} \quad (18)$$

البرهان : سوف يعتمد البرهان على العلاقة (8)

ومن خلال تعريف الفضاء المرافق لفضاء لورنتز (12) يمكننا كتابة النظيم $R_{\phi,\infty}$, نأخذ الدوال من $\bar{E}_0(R_+)$

في الفضاء المرافق للفضاء $\Lambda^p(u)$ حيث $1 < p < \infty$:

$$\|R_{\phi,\infty}[g^*]\|_{\Gamma^{p'}\left(\frac{t^{p'}u(t)}{V^{p'}(t)}\right)} = \left(\int_0^\infty R_{\phi,\infty}^{**p'}[g^*](t) \frac{t^{p'}u(t)}{V^{p'}(t)} dt \right)^{\frac{1}{p'}}$$

هنا اعتمدنا على تعريف فضاء لورنتز في (11)

وبحسب التمهيدية 2 نحصل على :

$$\begin{aligned} \|R_{\phi,\infty}[g^*]\|_{\Gamma^{p'}\left(\frac{t^{p'}u(t)}{V^{p'}(t)}\right)} &\cong \left(\int_0^\infty R_{\phi,\infty}^{p'}[g^*](t) \frac{t^{p'}u(t)}{V^{p'}(t)} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= \left(\int_0^\infty \left[\int_0^\infty f_\phi(t,\tau)g^*(\tau)d\tau \right]^{p'} \frac{t^{p'}u(t)}{V^{p'}(t)} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \end{aligned}$$

وبحسب التعريف في (5) للدالة f_ϕ فإن النظيم $R_{\phi,\infty}$ يكتب في الفضاء $\Gamma^{p'}\left(\frac{t^{p'}u(t)}{V^{p'}(t)}\right)$ بالشكل :

$$\|R_{\phi,\infty}[g^*]\|_{\Gamma^{p'}\left(\frac{t^{p'}u(t)}{V^{p'}(t)}\right)} = \left(\int_0^\infty \left[\varphi(t) \int_0^t g^*(\tau)d\tau + \int_t^\infty \varphi(\tau)g^*(\tau)d\tau \right]^{p'} \frac{t^{p'}u(t)}{V^{p'}(t)} dt \right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$\cong$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$\cong \left(\int_0^\infty \left[\varphi(t) \int_0^t g^*(\tau) d\tau \right]^{p'} \frac{t^{p'} u(t)}{V^{p'}(t)} dt \right)^{\frac{1}{p'}} + \left(\int_0^\infty \left[\int_t^\infty \varphi(\tau) g^*(\tau) d\tau \right]^{p'} \frac{t^{p'} u(t)}{V^{p'}(t)} dt \right)^{\frac{1}{p'}}$$

العلاقة الأخيرة محققة في فضاء لورنتز الذي هو فضاء باناخ بالإضافة الى التكاملات موجبة .

ومنه نحصل على :

$$\| R_{\varphi, \infty} [g^*] \|_{\Lambda^{p'}(u)} \cong I_3 + I_4 \quad (19)$$

حيث أن :

$$I_3 = \left(\int_0^\infty \left[\varphi(t) \int_0^t g^*(\tau) d\tau \right]^{p'} \frac{t^{p'} u(t)}{V^{p'}(t)} dt \right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$I_4 = \left(\int_0^\infty \left[\int_t^\infty \varphi(\tau) g^*(\tau) d\tau \right]^{p'} \frac{t^{p'} u(t)}{V^{p'}(t)} dt \right)^{\frac{1}{p'}}$$

ولتقدر I_3 و I_4 وباختيار الدالة المتناقصة g^* ونحصل على

$$I_3 \geq \left(\int_0^\infty \left[\varphi(t) g^*(t) \int_0^t d\tau \right]^{p'} \frac{t^{p'} u(t)}{V^{p'}(t)} dt \right)^{\frac{1}{p'}} = \left(\int_0^\infty [\varphi(t) g^*(t)]^{p'} \frac{t^{2p'} u(t)}{V^{p'}(t)} dt \right)^{\frac{1}{p'}} = s$$

هنا استخدمنا متراجحة هاردي المعممة [6] . ومنه يوجد ثابت c غير متعلق ب φ و g^* ومنه نجد أن :

$$I_4 \leq c \cdot s$$

ومنه يعرف B بالشكل :

$$B = \sup_{r>0} \left(\int_0^r \frac{t^{p'} u(t)}{V^{p'}(t)} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \cdot \left(\int_r^\infty \frac{t^{-2p} u^{\frac{-p}{p'}}(t)}{V^{-p}(t)} dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \quad (16)$$

وبالتالي B ثابت

ومنه نجد $s \geq I_3$ ومن جهة ثانية $I_4 \leq c \cdot s$ ومنه $I_4 \leq c \cdot I_3$

من العلاقة (19) نستخدم مؤثر هاردي $R_{\varphi, \infty}$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$\begin{aligned} \|R_{\varphi, \infty}[g^*]\|_{\Gamma^{p'}\left(\frac{t^{p'}u(t)}{V^{p'}(t)}\right)} &\cong \left(\int_0^\infty \left[\varphi(t) \int_0^t g^*(\tau) d\tau \right]^{p'} \frac{t^{p'}u(t)}{V^{p'}(t)} dt \right)^{\frac{1}{p'}} = \\ &= \left(\int_0^\infty \left[\varphi(t) \cdot \frac{1}{t} \int_0^t g^*(\tau) d\tau \right]^{p'} \frac{t^{2p'}u(t)}{V^{p'}(t)} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= \left(\int_0^\infty [\varphi(t) \cdot g^{**}(t)]^{p'} \frac{t^{2p'}u(t)}{V^{p'}(t)} dt \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= \left(\int_0^\infty [g^{**}(t)]^{p'} \frac{t^{2p'}u(t)\varphi^{p'}(t)}{V^{p'}(t)} dt \right)^{\frac{1}{p'}} = \|g\|_{\Gamma^{p'}\left(\frac{t^{p'}u(t)}{V^{p'}(t)}\right)} \quad (20) \end{aligned}$$

الصيغة (8) تيرهن الفضاء (RIS) الأمثل $\widetilde{X}_0(R_+)$ وهو مرافق النظيم في (20)

$$\|f\|_{\widetilde{X}_0(R_+)} \cong \|f\|_{[\Gamma^{p'}(v)]'}$$

حيث :

$$v(t) = \frac{t^{2p'}u(t)\varphi^{p'}(t)}{V^{p'}(t)}$$

مع الأخذ بعين الاعتبار في الفضاء (RIS) أن فضاء لورنتز ومارسينكيف تحتوي على الدالة المميزة لمجموعات من القياسات المحدودة [8] ومنه :

$$\|f\|_{[\Gamma^{p'}(v)]'} \cong \left(\int_0^\infty \frac{t^{p+p'-1}f^{**p}(t)V(t) \int_t^\infty \tau^{-p'}v(\tau)d\tau}{(V(t) + t^{p'} \int_t^\infty \tau^{-p'}v(\tau)d\tau)^{p+1}} dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

حيث أن

$$V(t) = \int_0^t v(\tau)d\tau = \int_0^t \frac{\tau^{2p'}u(\tau)\varphi^{p'}(\tau)}{V^{p'}(\tau)} d\tau$$

ومنه نجد أن :

$$w(t) = \frac{t^{p+p'-1}V(t) \int_t^\infty \tau^{-p'}v(\tau)d\tau}{(V(t) + t^{p'} \int_t^\infty \tau^{-p'}v(\tau)d\tau)^{p+1}}$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

الدالة w تدعى بدالة الوزن (18) المعرفة في شروط المبرهنة ومنه نجد :

$$\|f\|_{\tilde{X}_0(R_+)} \cong \|f\|_{\Gamma^p(w)}$$

وبالتالي تم برهان المبرهنة .

النتائج و التوصيات :

- 1- الخصائص العامة للكمون تبنى على أساس فضاء لورنتز القابل للقياس .
- 2- الأشكال المتكافئة لمخاريط الدوال المرتبة و المتناقصة للكمون تبنى على أساس فضاء لورنتز .
- 3- تمت إضافة مؤثر لظمر فضاء كمون ريس في الفضاء (RIS) و إيجاد الفضاء الأمثل لهذا الظمر في فضاء لورنتز .
- 4- و يبقى السؤال المطروح إيجاد الظمر الأمثل لفضاءات الكمون في الفضاء (RIS) .
- 5- ما هي الحالات الأخرى للنقاط الشاذة لكمون ريس و ببسلة المعممة التي ليست ذات قوة في جوار المبدأ؟

المراجع العلمية

- [1] C. Bennett, R. C. Sharpley, Interpolation of Operators, Academic Press, 1988.
- [2] Э. Г. Бахтигареева, М. Л. Гольдман, "Построение оптимальной оболочки для конуса неотрицательных функций со свойствами монотонности", Труды Матем.Института им. В.А.Стеклова, (2016) .
- [3] Бокаев Н.А., Гольдман М.Л., Каршыгина Г.Ж. Конусы функций с условиями монотонности для обобщенных потенциалов Бесселя и Рисса, «Математические заметки» – 2018.
- [4] Erik Kristiansson , Decreasing Rearrangement and Lorentz $L(p, q)$ Spaces, Lech Maligranda, 2002
- [5] M. L. Goldman , Rearrangement Invariant Envelopes of Generalized Besov, Sobolev, and Calderon Spaces, Contemporary Mathematics, 2003
- [6] М. Л. Гольдман, "Об оптимальных вложениях потенциалов Бесселя и Рисса", Труды Матем.Института им. В.А.Стеклова, (2010).
- [7] M. L. Goldman , P. P. Zabreiko , Optimal Reconstruction of a Banach Function Space from a Cone of Nonnegative Functions, *Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics*, (2013).
- [8] أ.د.ابراهيم إبراهيم , سلمان عيسى , "التغطية المرتبة لمخاريط الدوال مع خواص الترتيب في الفضاء RIS" منشورات مجلة جامعة طرطوس المجلد السابع العدد الثاني 2023.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

متباينة ميلاس على زمرة هايزنبرغ

د. سهى علي سلامة

عضو هيئة تعليمية _ جامعة طرطوس

الملخص

نقدّم في هذا البحث زمرة هايزنبرغ التي تعتبر بمثابة الزمرة الأكثر شهرة في زمرة لي عديمة القوى، وتلعب دوراً هاماً في العديد من فروع الرياضيات، مثل نظرية التمثيل، المعادلات التفاضلية الجزئية، ونظرية الأعداد... إضافة إلى أنها تُقدّم توسعاً ملحوظاً في الحصول على نتائج مهمة في التحليل التوافقي الإقليدي، كما ندرس متوسطات ريس للقيم الذاتية لمؤثر لابلاس هايزنبرغ الخاضع لشروط حدود ديريكليه على مجالات محدودة لزمرة هايزنبرغ الأولى H_1 ، و نحصل على متباينة مع حد رئيس حدي و حد بمرتبة أدنى إضافي.

الكلمات المفتاحية:

زمرة هايزنبرغ، مؤثر لابلاس هايزنبرغ، متوسطات ريس، القيم الذاتية، مسافة كارنوت_ كاراثيودوري
.Carnot_Carathéodary

Melas inequality on Heisenberg group

Abstract

In this work we introduce the Heisenberg group which is the most well known example from the realm of nilpotent Lie groups, and plays an important role in several branches of mathematics, such as representation theory, partial differential equations and number theory... It also offers the greatest opportunity for generalizing the remarkable results of Euclidean harmonic analysis. We also study Riesz means of the eigenvalues of the Heisenberg Laplacian subject to Dirichlet boundary conditions on bounded domains of the first Heisenberg group \mathbb{H}^1 . we obtain an inequality with a sharp leading term and an additional lower order term.

Key Words:

Heisenberg group, Heisenberg Laplacian, Riesz means, eigenvalues, Carnot_Carathéodary metric.

مقدمة:

إنّ الطيف في أبسط أشكاله في الفيزياء الرياضية هو رمز لمجموعة القيم الذاتية لمؤثر تفاضلي مُعطى. فقد تمّ الاكتشاف في القرنين الثامن عشر و التاسع عشر أنّه في الجمل الاهتزازية مثل ترددات الطبلّة في الأوضاع العادية



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

(normal mode) (ما يسمى أيضاً بحالات التوقف أو الحالات الذاتية) فإن هذه الترددات تكون متوافقة مع الدوال الذاتية للمؤثر التفاضلي.

إنّ هذه الموجات الدائمة (standing waves) هي الموصوفة رياضياً بالقاعدة المتعامدة من الدوال الذاتية للمؤثر التفاضلي، التي تُسفر عن تجزئة قانونية (canonical decomposition) لفضاء هيلبرت الريدف الذي يؤثر فيه المؤثر التفاضلي المترافق ذاتياً، وهذا ما يُعرف الآن بمبرهنة التمثيل الطيفي و اختصاراً بالمبرهنة الطيفية. تُعتبر هذه المبرهنة أساساً للنظرية الطيفية التي هي فرع من فروع الرياضيات يعتمد بشكل رئيس على تحليل المؤثرات التفاضلية المترافقة ذاتياً و خصائص التحلل الطيفي المقابل لها. وبشكل عام فإنّه من الصعوبة بمكان حساب طيف بعض المؤثرات التفاضلية تماماً، لذلك فقد بُذلت الكثير من الجهود في العقود الماضية لتطوير الطرائق العددية لتقدير الطيف.

هدف البحث:

سنعرف في هذا البحث زمرة هايزنبرغ الأولى و مؤثر لابلاس الجزئي المقابل لها الذي هو مجموع مربعات المؤثرات التفاضلية من الحقول المتجهة اللامتغيرة يسارياً على هذه الزمرة، و سندرس الخصائص التحليلية لهذا المؤثر التفاضلي لا سيما متباينة ميلاس.

منهجية البحث:

قبل دراسة الطيف لمؤثر لابلاس هايزنبرغ على زمرة هايزنبرغ سنفرض أولاً الطيف لمؤثر لابلاس، الذي هو المقابل العادي لمؤثر لابلاس هايزنبرغ في الفضاء الإقليدي. سنقدم لمحة عن التقديرات الطيفية لمؤثر لابلاس، و ستكون بمثابة نموذج مقارنة مع الحالة تحت الناقصية، حيث درست المسائل الناقصية بدقة في العقود الماضية.

المناقشة: [1], [2], [5], [12], [13]

معلوم أن مؤثر لابلاس واحد من الأمور الرئيسية في الفيزياء الرياضية خلال القرون الماضية. يظهر هذا المؤثر في عدّة مجالات كالمعادلات التفاضلية، و وصف الظواهر الفيزيائية المختلفة مثل انتشار الأمواج و حركة المواد السائلة و الظواهر المتعلقة بميكانيكا الكم.

لنفرض لأجل $n \in \mathbb{N}$ مؤثر لابلاس في الإحداثيات الديكارتية، بأنه المؤثر التفاضلي من المرتبة الثانية المُعطى بالشكل: [2]

$$-\Delta := - \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}^2$$

لنفرض لأجل مجال $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ذي حجم منتهٍ مؤثراً مترافقاً ذاتياً نرسم له بالرمز $-\Delta_\Omega$ يرتبط مع الصيغة التربيعية شبه المحدودة (semi_bounded quadratic form) : [12]

$$a[u] := \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx = \sum_{j=1}^n \int_\Omega |\partial_{x_j} u(x)|^2 dx$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

معرف على مجال جزئي من فضاء سوبوليف $H_0^1(\Omega)$.

يسمى المؤثر $-\Delta_\Omega$ مؤثر لابلاس دير بخلية (Dirichlet Laplacian).

للحصول على النتائج المرجوة من هذا العمل سوف نعتمد على القيم الذاتية لمؤثر لابلاس دير بخلية.

إن الغمر المتراس (the compact embedding) [12]

$$H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$$

يعطينا متتالية موجبة غير متناقصة من القيم الذاتية

$$0 < \lambda_1(\Omega) < \lambda_2(\Omega) \leq \lambda_3(\Omega) \leq \dots$$

التي تتراكم فقط في اللانهاية.

The eigenvalue counting)

لقد درس العالم الألماني Hermann Weyl دالة عد القيم الذاتية (function [13])

$$N(\lambda, \Omega) := \{j \in \mathbb{N}; \lambda_j(\Omega) < \lambda\}$$

و أثبت النتيجة الأساسية الآتية:

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} N(\lambda, \Omega) \lambda^{-\frac{n}{2}} = \frac{\tau_n}{(2\pi)^n} |\Omega| \quad (1,1)$$

حيث $|\Omega|$ هو قياس ليبيغ بالبعد n لـ Ω , و τ_n هو حجم كرة الوحدة في \mathbb{R}^n .

تسمى النهاية في العلاقة (1,1) بقانون وايل (Weyl's law) أو مقاربات وايل (Weyl asymptotics).

ننوه هنا إلى أنه يتم تحديد مقاربات وايل من خلال حجم فضاء الطور للجسيم المحصور في Ω , و الذي يعتبر مقدار مهم في الفيزياء.

لقد فرض وايل أنه يوجد متغير بمرتبة أدنى يعتمد على مساحة $\partial\Omega$, و عندئذ فإنه يمكن إثبات العلاقة (1.1) بسهولة.

و في عام 1980 أثبت V. Ivrii هذه الفرضية تحت فرضيات أقوى على الهندسة في Ω , و حصل على العلاقة: [13]

$$N(\lambda, \Omega) = \frac{\tau_n}{(2\pi)^n} |\Omega| \lambda^{\frac{n}{2}} - \frac{1}{4} \frac{\tau_{n-1}}{(2\pi)^{n-1}} |\partial\Omega| \lambda^{\frac{n-1}{2}} + o\left(\lambda^{\frac{n-1}{2}}\right) \quad (1.2)$$

حيث $+\infty \rightarrow \lambda$ و $|\partial\Omega|$ هي مساحة حد Ω .

نسمي هذه الصيغة مقاربات وايل المُحسنة (the refined Weyl asymptotics).



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

و في عام 1961 بين G.Pólya أنه إذا كانت Ω مجالاً يقبل شبكة (tiling domain) فإن:

$$N(\lambda, \Omega) \leq \frac{\tau_n}{(2\pi)^n} |\Omega| \lambda^{\frac{n}{2}} \quad (1.3)$$

لأجل كل $\lambda \geq 0$.

نوه هنا إلى أن الثابت في الطرف الأيمن في العلاقة (1.3) لا يمكن تحسينه بسبب العلاقة (1.1).
تتقترح فرضية Pólya أن هذه المتباينة تبقى صحيحة لأجل كل المجالات المفتوحة ذات الحجم المنتهي.
تم وضع التعميم الوحيد المعروف من قبل A. Laptev حيث اعتبر أن المجالات ذات قياس منتهٍ، و تعطى بالصورة:

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2 \subset \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$$

$$\text{حيث } n = n_1 + n_2 ; \quad n_1 \geq 2, n_2 \geq 1$$

و على فرض أن $N(\lambda, \Omega_1)$ تحقق فرضية Pólya فإن $N(\lambda, \Omega)$ تحقق هذه الفرضية.
و قد أصبح واضحاً خلال العقود الماضية أن الأمور تصبح أسهل إذا لم يتم فرض دالة العد بشكل مباشر و إنما كمجموع. لذلك فإننا نركز على التقديرات لمتوسطات ريس المعرفة بالشكل: [5]

$$R_\gamma(\lambda, \Omega) = \text{Tr}(A(\Omega) - \lambda)_\gamma^- = \sum_{k \in \mathbb{N}: \lambda_k(\Omega) < \lambda} (\lambda - \lambda_k(\Omega))^\gamma$$

لأجل كل $\gamma \geq 0$.

لأجل $\gamma = 0$ نحصل على دالة العد، و لأجل $\gamma = 1$ نحصل على الأثر.

إن المتطابقة الآتية:

$$R_{\gamma+\delta}(\lambda, \Omega) = \frac{1}{\beta(\delta, \gamma + 1)} \int_0^\infty t^{\delta-1} R_\gamma(t - \lambda, \Omega) dt, \quad \delta > 0 \quad (1.4)$$

حيث $\beta(\cdot, \cdot)$ هي دالة بيتا.

و تبين هذه المتطابقة أنه يمكن الحصول على الحدود المنتظمة أو النتائج المقاربة لأجل متوسطات ريس بقوى أعلى باستخدام نتائج لأجل متوسطات ريس بمرتبة أدنى.
و بالتالي لأجل $\gamma = 0$ و اختيار Ω بشكل مناسب و استخدام العلاقة (1.2) يمكننا الحصول على مقاربات وإيل المقابلة لأجل متوسطات ريس: [5]

$$\text{Tr}(A(\Omega) - \lambda)_\gamma^- = L_{\gamma, n}^{cl} |\Omega| \lambda^{\gamma + \frac{n}{2}} - \frac{1}{4} L_{\gamma, n-1}^{cl} |\partial\Omega| \lambda^{\gamma + \frac{(n-1)}{2}} + o\left(\gamma + \frac{(n-1)}{2}\right) \quad (1.5)$$

حيث $\lambda \rightarrow +\infty$ و حيث يعرف ثابت Lieb-Thirring الكلاسيكي بالشكل:

$$L_{\gamma, n}^{cl} = \frac{\Gamma(\gamma + 1)}{(4\pi)^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\gamma + \frac{n}{2} + 1\right)}$$

حيث $\Gamma(\cdot)$ هي دالة غاما.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 آب 2024
دمشق - سورية

1_ زمرة هايزنبرغ (The Heisenberg group): [2], [1], [9], [3], تأخذ زمرة هايزنبرغ دوراً مهماً في نظرية التمثيل لزمرة لي عديمة القوى، ونظرية البنى للزمرة المنتهية، ونظرية المعادلات التفاضلية الجزئية، وميكانيكا الكم والهندسة شبه الريمانية. سميت زمرة هايزنبرغ بهذا الاسم نسبة إلى العالم الألماني Werner Heisenberg الذي وضع أساسيات ميكانيكا الكم في بداية القرن العشرين. ويعتبر مبدأ عدم التعيين لهايزنبرغ Uncertainty Principle أحد أبرز إسهاماته في ميكانيكا الكم، والذي ينص على أنه من المستحيل قياس الموضع الدقيق وسرعة الجسيم معاً وبأن واحد، وهو ما يعبر عنه من الناحية الرياضية من خلال علاقة التبادل غير المعدومة لمؤثر الموضع ومؤثر كمية الحركة المتعلقة بجداء لي. إن زمرة لي المرتبطة بجبر لي المولد بعلاقة التبادل لمؤثر الموضع ومؤثر كمية الحركة هي زمرة هايزنبرغ.

إن زمرة هايزنبرغ الأولى ورمزها \mathbb{H} تُعرّف كمكافئ لـ \mathbb{R}^3 وفق قانون التشكيل الآتي:

$$(x_1, x_2, x_3) \boxplus (y_1, y_2, y_3) := \left(x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3 - \frac{1}{2}(x_1 y_2 - x_2 y_1) \right) \quad (2.1)$$

كما أنه قد يتم استبدال المعامل $\frac{1}{2}$ أحياناً بـ 2 أو -2 مما ينتج عنه زمرة إيزومورفية، ومن وجهة نظر تحليلية فإنه لا يوجد اختلاف بين هذه الحالات. في بحثنا هذا أهملنا زمرة هايزنبرغ من مراتب عليا للتبسيط علماً أنه يمكن تمديد جميع النتائج إلى حالات أعم و أشمل.

ملاحظة 1: [1], [2], [10]

نُذكر أن هدفنا في هذا البحث هو دراسة مؤثر لابلاس الجزئي (sub-Laplacian) الذي هو مجموع مربعات الحقول المتجهة المماسية اللا متغيرة يسارياً في عنصر الوحدة لـ \mathbb{H} . وبالتالي فإن تفاضل زمرة لي في عنصر الوحدة يعطي تمثيل لـ \mathfrak{h} بمتغيرات هي حقول متجهية. ثم ينتج بالحساب:

$$X_1 = \partial_{x_1} + \frac{1}{2}x_2\partial_{x_3}$$

$$X_2 = \partial_{x_2} - \frac{1}{2}x_1\partial_{x_3}$$

$$X_3 = \partial_{x_3} \quad (2.2)$$

وذلك لأجل نقطة معطاة $x := (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{H}$. وقد دعيت هذه المؤثرات التفاضلية الجزئية من المرتبة الأولى حقولاً متجهة لأنها يمكن أن تعرف بشكل قانوني بحقول متجهة على \mathbb{H} تحقق علاقة التبادل لـ \mathfrak{h} . حيث جداء لي في هذه الحالة يُعرّف على أنه مؤثر تفاضلي $[X_1, X_2]$ على $C^\infty(\mathbb{H})$ ، و $X_1 X_2 - X_2 X_1 =: c$ ، وبشكل خاص X_1, X_2, X_3 تشكل قاعدة لا متغيرة يسارياً في \mathfrak{h} .

مبرهنة هورماندر (Hörmander theorem): [8]

$$P = \sum_{j=1}^r X_j^2 + X_0 + c$$

ليكن P مؤثراً تفاضلياً معطى بالصيغة: حيث X_0, \dots, X_r ترمز إلى مؤثرات تفاضلية متجانسة من المرتبة الأولى في المجموعة المفتوحة $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ والمعاملات c تنتمي إلى $C^\infty(\Omega)$ (و هو فضاء الدوال القابلة للاشتقاق عدداً لا نهائياً من المرات على Ω ، والتي جميع مشتقاتها مستمرة على Ω) [10] ولنفرض أنه من بين المؤثرات:

$$X_{j_1}, [X_{j_1}, X_{j_2}], [X_{j_1}, [X_{j_2}, X_{j_3}]], \dots, [X_{j_1}, [X_{j_2}, [X_{j_3}, \dots, X_{j_k}]]] \quad ; j_i = 0, 1, \dots, r$$

يوجد n منها مستقلة خطياً في أي نقطة من Ω ، عندئذٍ فإن P فوق ناقصي.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

ملاحظة 2: [2] [14]

لنذكر بعض الخصائص التي تميز مؤثر لابلاس:

- لا متغير تحت الانسحابات.
- لا متغير تحت الدورانات.
- متجانس من الدرجة 2.

و من الواضح أنه يتعين علينا إخضاع هذه الخصائص بما يناسب زمرة هايزنبرغ لنحصل على مؤثر يوثر على \mathbb{H} كمؤثر لابلاس على \mathbb{R}^n .

مؤثر لابلاس هايزنبرغ (The Heisenberg Laplacian): [2], [8]

إن المؤثر التفاضلي الذي يحقق الخصائص الثلاث الأخيرة على \mathbb{H} يجب أن يكون بالشكل: $-X_1^2 - X_2^2 + \alpha X_3$; $\alpha \in \mathbb{R}$

و بالتالي فإن المؤثر التفاضلي الذي هو مجموع مربعات و يحقق هذه الخواص يعطى عندئذ بالشكل:

$$-\Delta_{\mathbb{H}} := -X_1^2 - X_2^2$$

هذا المؤثر اللابلاسي الجزئي يدعى مؤثر لابلاس هايزنبرغ (Heisenberg Laplacian), كما أنه يُعرف

أيضاً بمؤثر لابلاس Kohn (Kohn Laplacian).

و كنتيجة لمبرهنة هورماندر الأساسية L. Hörmander فإننا نجد أن $-\Delta_{\mathbb{H}}$ هو مؤثر تفاضلي فوق ناقصي من المرتبة الثانية, و ذلك لأن الحقول المتجهة تشكل قاعدة في أي نقطة من \mathbb{H} , و بالمقارنة مع مؤثر لابلاس فإن مؤثر لابلاس لا يكون ناقصياً بل تحت الناقصي في أي نقطة من \mathbb{H} .

ملاحظة 3: [6]

لأجل أي $x \in \mathbb{H}$ يوجد جوار $K \subset \mathbb{H}$, $x \in K$, و ثابت $c_K > 0$ بحيث تتحقق لأجل كل $u \in C_0^\infty(K)$ العلاقة:

$$\|u\|_{\frac{1}{2}}^2 \leq c_K \left(\int_K |X_1 u(x)|^2 + |X_2 u(x)|^2 + |u(x)|^2 dx \right)$$

و تكون محققة للخاصة تحت الناقصية لمؤثر لابلاس هايزنبرغ.

2_ مسافة كارنوت كاراثيودوري و الجيوديز: [11], [13]
(The Carnot_Carathéodary metric and geodesics)

سنقدم الآن وصفاً للهندسة شبه الريمانية على \mathbb{H} , و بشكل خاص سنقدم مسافة كارنوت كاراثيودوري Carnot_Carathéodary.

تقيس هذه المسافة البعد بين النقاط على \mathbb{H} باستخدام المنحنيات التي مشتقها يقع نقطياً في الجملة المولدة للحقول المتجهة X_1 و X_2 .

و سنرى أن الخصائص التحليلية لمؤثر لابلاس هايزنبرغ مع مسافة كارنوت كاراثيودوري Carnot_Carathéodary تكون مثل تلك المعروفة في حالة المسافة الإقليدية المتعلقة بمؤثر لابلاس.

تعريف 8: ندعو منحنى ليبشيتز Lipschitz curve $\gamma: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H}$ بأنه أفقي (horizontal) إذا كان المنحنى

$$\gamma(t) := (\gamma_1(t), \gamma_2(t), \gamma_3(t))$$

يحقق لأجل أي $t \in (a, b)$ المعادلة التفاضلية الآتية:

$$\gamma_3'(t) = \frac{1}{2} (\gamma_2(t)\gamma_1'(t) - \gamma_1(t)\gamma_2'(t)) \quad (2.3)$$

و الذي يكافئ الشرط: $\gamma'(t) \in \text{span}\{X_1(\gamma(t)), X_2(\gamma(t))\}$ لأجل كل $t \in (a, b)$

و بتطبيق ميرهنة Chow نجد أن المنحنيات الأفقية موجودة لأن X_1, X_2 تحقق شرط الرتبة المنتهية لهورماندر. لذلك فإنه لأجل ثنائية معطاة $x, y \in \mathbb{H}$ نفرض أسرة من المنحنيات:



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 آب 2024
دمشق - سورية

$$F(x, y) := \{ \gamma: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{H} : \gamma \text{ افقي ويصل } x \text{ و } y \} \quad (2.4)$$

ونضع:

$$l_{\mathbb{H}}(\gamma) := \int_a^b \sqrt{\gamma_1'(t)^2 + \gamma_2'(t)^2} dt \quad (2.5)$$

بأخذ $x, y \in \mathbb{H}$ فإن مسافة كارنوت كاراثيودوري Carnot_Carathéodary تُعرف عندئذ بالشكل:

$$d_c(x, y) := \inf_{\gamma \in F(x, y)} l_{\mathbb{H}}(\gamma) \quad (2.6)$$

3_ التقديرات الطيفية لمؤثر لابلاس هايزنبرغ: [4], [6], [7]
 لتكن $\Omega \subset \mathbb{H}$ مجالاً محدوداً و لنفرض مؤثر لابلاس هايزنبرغ على $L^2(\Omega)$ مع شروط حدود ديرخليه المعطاة بالشكل:

$$A(\Omega) := -X_1^2 - X_2^2$$

و نذكر بأن:

$$\begin{aligned} X_1 &= \partial_{x_1} + \frac{1}{2} x_2 \partial_{x_3} \\ X_2 &= \partial_{x_2} - \frac{1}{2} x_1 \partial_{x_3} \end{aligned} \quad (3.1)$$

و بتعبير أدق $A(\Omega)$ هو مؤثر مترافق ذاتياً وحيد مرتبط بغلافة الصيغة التربيعية:

$$a[u] := \int_{\Omega} (|X_1 u(x)|^2 + |X_2 u(x)|^2) dx \quad (3.2)$$

المعطاة سابقاً على $C_0^\infty(\Omega)$.

$$[X_2, X_1] = \partial_{x_3} := X_3 \quad (3.3)$$

و تكون العلاقة: [6]

$$\|u\|_{\frac{1}{2}}^2 \leq c (a[u] + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2) \quad ; u \in C_0^\infty(\Omega) \quad (3.4)$$

محققة لأجل بعض $c > 0$, و التنظيم في الطرف الأيسر يرمز إلى تنظيم سوبوليف من المرتبة $\frac{1}{2}$. [4]

و بالتالي فإن مجال غلافة $a[\cdot]$ هو غمر مستمر في $H_0^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ (continuously embedded), و بما أن

التقابل $L^2(\Omega) \rightarrow H_0^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ متراس فإن ذلك يؤدي إلى أن طيف $A(\Omega)$ منفصل تماماً. [4]
 نرسم للمتسلسلة غير المتناقصة من القيم الذاتية لـ $A(\Omega)$ بالرمز $\{\lambda_k(\Omega)\}_{k \in \mathbb{N}}$, و نرسم للمتسلسلة الموافقة من الدوال الذاتية المتعامدة بالرمز $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$:

$$A(\Omega) v_k = \lambda_k(\Omega) v_k \quad ; \|v_k\|_{L^2(\Omega)} = 1 \quad (3.5)$$

و قد قام كل من A. Laptev و A.M. Hanson بإثبات العلاقة: [7]

$$Tr(A(\Omega) - \lambda)_- = \sum_{k \in \mathbb{N}} (\lambda - \lambda_k(\Omega))_+ \leq \frac{|\Omega|}{96} \lambda^3, \quad \lambda > 0 \quad (3.6)$$

حيث تتكرر القيم الذاتية وفقاً لتعدادها النقطي المنتهي, و $|\Omega|$ ترمز إلى قياس ليبيغ بثلاثة أبعاد لـ Ω . و إضافة إلى ذلك فإن الثابت $\frac{1}{96}$ في الطرف الأيمن من العلاقة الأخيرة هو ثابت حدي, و هذا ينتج من المعادلة: [7]



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \lambda^{-3} Tr (A(\Omega) - \lambda)_- = \frac{|\Omega|}{96} \quad (3.7)$$

هذا ويمكن تحسين العلاقة (3.6) بإضافة حد سالب بمرتبة أدنى بالنسبة لـ λ إلى الطرف الأيمن، أي سنبين أنه لأجل كل $\lambda > 0$ تتحقق العلاقة:

$$Tr(A(\Omega) - \lambda)_- \leq \frac{|\Omega|}{96} \lambda^3 - C(\Omega) \lambda^\alpha \quad (3.8)$$

حيث $C(\Omega)$ هو ثابت موجب يتعلق فقط بـ Ω ، و $\alpha \in (0,3)$.

مفاهيم لازمة: [13]

لأجل نقطة ثابتة $x \in \mathbb{H}$ نرمز للطول الإقليدي بالرمز $\|x\|_e$ ، ونذكر بأن $d_C(x, y)$ ترمز إلى مسافة كارنوت كاراثيودوري Carnot-Carathéodary بين نقطتين $x, y \in \mathbb{H}$.
 لتكن: $C_r(0) = \{x \in \mathbb{H} : d_C(x, 0) < r\}$ كرة متمركزة في نقطة الأصل، لها نصف قطر داخلي $r > 0$ فيما يتعلق بمسافة $C - C$.

لتكن المسافة من نقطة ثابتة $x \in \Omega$ إلى حدود Ω فيما يتعلق بمسافة $C - C$:

$$\delta_C(x) := \inf_{y \in \partial\Omega} d_C(x, y) \quad (3.9)$$

و عند الضرورة نمدد الدالة $\delta_C(\cdot)$ على \mathbb{H} ، ولأجل النقاط الواقعة في Ω^c نضع $\delta_C(x) = 0$.
 وبالإضافة إلى هذا فإننا نرمز لنصف القطر الداخلي لـ Ω فيما يتعلق بمسافة $C - C$ بالشكل:

$$R(\Omega) := \sup_{x \in \Omega} \delta_C(x) \quad (3.10)$$

و نرمز لقطر Ω بالشكل:

$$D(\Omega) := \inf \left\{ l > 0 : \exists a \in \Omega ; \Omega \subseteq C_{\frac{l}{2}}(a) \right\}$$

ملاحظة 4: إن المعادلة (3.7) تعني:

$$Tr(A(\Omega) - \lambda)_- = \frac{|\Omega|}{96} \lambda^3 + o(\lambda^3) ; \lambda \rightarrow \infty$$

و حتى الآن فإن مرتبة الحد المتبقي في هذه العلاقة ما تزال غير معروفة.

تمهيدية 1: إن العلاقة الآتية محققة:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{\Omega} |P_{k,B}(x, y)|^2 dy \right) dx = \int_{\Omega} \left(\int_{\mathbb{R}^2} P_{k,B}(x, y) P_{k,B}(x, y) dx \right) dy \\ = \int_{\Omega} P_{k,B}(y, y) dy = \frac{B}{2\pi} |\Omega| \quad (3.11)$$

حيث $P_{k,B}$ هي نواة التكامل للمسقط المتعامد في $L^2(\mathbb{R}^2)$ على سوية Landau (Landau level) الموافق لـ k و هو $B(2k - 1)$ لهاملتوني Landau مع حقل مغناطيسي ثابت لأجل $B > 0$ و $k \in \mathbb{N}$ ، و يكون:

$$P_{k,B}(y, y) = \frac{1}{2\pi} B ; y \in \mathbb{R}^2$$

مبرهنة 3-1: [13]

لتكن $\Omega \subset \mathbb{H}$ مجالاً محدوداً، عندئذٍ فإن المتباينة:

$$|\Omega^\beta| \geq \beta \frac{16 R(\Omega)^4}{5\pi^2 D(\Omega)} \quad (3.12)$$

محققة لأجل كل $\beta \in (0, R(\Omega)]$.

مبرهنة 3-2:

لتكن $\Omega \subset \mathbb{H}$ مجالاً محدوداً، عندئذٍ فإن العلاقة:



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 آب 2024
دمشق - سورية

$$Tr(A(\Omega) - \lambda)_- \leq \max \left\{ 0, \frac{|\Omega|}{96} \lambda^3 - \lambda^2 \frac{R(\Omega)^8}{150 |\Omega| D(\Omega)^2 \pi^4} \right\} \quad (3.13)$$

محقة لأجل كل $\lambda > 0$.

الإثبات:

سنقوم بتحليل متجه $x \in \mathbb{H}$ مثل:

$$x = (x', x_3) = (x_1, x_2, x_3) \quad (3.14)$$

نقوم بتمديد الدوال الذاتية $v_j(x)$ لأجل $A(\Omega)$ و $x \in \Omega^c$ و نكتب:

$$\begin{aligned} Tr(A(\Omega) - \lambda)_- &= \sum_{j: \lambda_j(\Omega) < \lambda} \lambda \|v_j\|_{L^2(\Omega)}^2 - \left\| \left(\partial_{x_1} + \frac{1}{2} x_2 \partial_{x_3} \right) v_j \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\ &\quad - \left\| \left(\partial_{x_2} - \frac{1}{2} x_1 \partial_{x_3} \right) v_j \right\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}} \sum_{j: \lambda_j(\Omega) < \lambda} \lambda \left(\|F_3 v_j(\cdot, \xi_3)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 - \left\| \left(i \partial_{x_1} + \frac{1}{2} x_2 \xi_3 \right) F_3 v_j(\cdot, \xi_3) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \right) d\xi_3 \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}} \sum_{j: \lambda_j(\Omega) < \lambda} \left\| \left(i \partial_{x_2} + \frac{1}{2} x_1 \xi_3 \right) F_3 v_j(\cdot, \xi_3) \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 d\xi_3 \end{aligned}$$

و بتطبيق التحلل الطيفي في (3.11) نحصل على التقدير الآتي من أجل الأثر:

$$Tr(A(\Omega) - \lambda)_- \leq \int_{\mathbb{R}} \sum_{j: \lambda_j(\Omega) < \lambda} \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda - |\xi_3|(2k-1)) \|f_{j,k,\xi_3}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 d\xi_3 \quad (3.15)$$

حيث: $\{|\xi_3|(2k-1)\}_{k \in \mathbb{N}}$ هي سويات Landau و

$$\begin{aligned} f_{j,k,\xi_3}(x') &:= \int_{\mathbb{R}^2} P_{k,\xi_3}(x', y') F_3 v_j(y', \xi_3) dy' \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\Omega} P_{k,\xi_3}(x', y') e^{-iy_3 \xi_3} v_j(y', y_3) dy' dy_3 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (P_{k,\xi_3}(x', \cdot) e^{-i\xi_3 \cdot}, v_j(\cdot))_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

و بعد ذلك نقدر الطرف الأيمن من (3.15) بشكل أكثر دقة و ذلك من خلال فرض الجزء الموجب ل $(\lambda - |\xi_3|(2k-1))$ و هذا يؤدي إلى العلاقة الآتية:

$$\begin{aligned} Tr(A(\Omega) - \lambda)_- &\leq \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda - |\xi_3|(2k-1))_+ \sum_{j=1}^{\infty} \|f_{j,k,\xi_3}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 d\xi_3 \\ &\quad - \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda - |\xi_3|(2k-1))_+ \sum_{j: \lambda_j(\Omega) \geq \lambda} \|f_{j,k,\xi_3}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 d\xi_3 \quad (3.16) \end{aligned}$$

و بما أن الجملة $\{v_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ هي قاعدة متعامدة في $L^2(\Omega)$ فإنه يمكن استخدام متطابقة Parseval لتقدير المجموع فوق j .

و لو أخذنا العلاقة (3.11) بعين الاعتبار فإننا نحصل على ما يأتي:



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|f_{j,k,\xi_3}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 d\xi_3 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{j=1}^{\infty} |\langle P_{k,\xi_3}(x', \cdot) e^{-i\xi_3}, v_j(\cdot) \rangle_{L^2(\Omega)}|^2 dx' = \frac{|\xi_3|}{4\pi^2} |\Omega| \quad (3.17)$$

و هذا يسمح لنا بحساب الحد الأول من الطرف الأيمن في (3.16). عندئذٍ فإنه يكون لدينا:

$$\int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda - |\xi_3|(2k-1))_+ \sum_{j=1}^{\infty} \|f_{j,k,\xi_3}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 d\xi_3 = \frac{|\Omega|}{2\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} (\lambda - \xi_3(2k-1))_+ \xi_3 d\xi_3 = \frac{|\Omega| \lambda^3}{12\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{|\Omega|}{96} \lambda^3$$

حيث استخدمنا المتطابقة:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \quad (3.18)$$

بأخذ التقديرات أعلاه، و باستخدام العلاقة (3.16) فإننا نحصل على العلاقة:

$$\begin{aligned} Tr(A(\Omega) - \lambda)_- &\leq \frac{|\Omega|}{96} \lambda^3 \\ &- \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda - |\xi_3|(2k-1))_+ \sum_{j:\lambda_j(\Omega) \geq \lambda} \|f_{j,k,\xi_3}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 d\xi_3 \end{aligned} \quad (3.19)$$

و هكذا يكون لدينا حد رئيس حدي و حد سالب إضافي، و سيتم التعامل مع الأخير في الخطوة الآتية: لننشئ حد أدنى مناسب لـ:

$$Q(\lambda, k, \xi_3) := \sum_{j:\lambda_j(\Omega) \geq \lambda} \|f_{j,k,\xi_3}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \quad (3.20)$$

و باستخدام المعادلة (3.17) فإنه يمكن كتابة المتسلسلة بالشكل:

$$\begin{aligned} Q(\lambda, k, \xi_3) &= \frac{|\xi_3|}{4\pi^2} |\Omega| - \sum_{j:\lambda_j(\Omega) < \lambda} \|f_{j,k,\xi_3}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\Omega} \left| P_{k,\xi_3}(x', y') e^{-iy_3\xi_3} - \sum_{j:\lambda_j(\Omega) < \lambda} \langle P_{k,\xi_3}(x', \cdot) e^{-i\xi_3}, v_j(\cdot) \rangle_{L^2(\Omega)} v_j(y) \right|^2 dy dx' \end{aligned} \quad (3.21)$$

و لتقدير الطرف الأيمن من الأدنى فإننا نفرض المجموعة:



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$E^\beta := \left\{ \Phi(t, k, \theta) \in \mathbb{H} : (t, k, \theta) \in (a - \beta, a) \times \left(-\frac{\pi}{D(\Omega)}, \frac{\pi}{D(\Omega)} \right) \times [0, 2\pi) \right\} \quad (3.22)$$

علماً أنه لدينا: $\Omega \supseteq \Omega^\beta \supseteq E^\beta$ حيث $\Omega := \{x \in \Omega : \delta_C(x) < \beta\}$ وذلك لأجل $\beta \in (0, R(\Omega)]$ وباستخدام المتباينة:

$$|z - w|^2 \geq \frac{1}{2}(|z|^2 - |w|^2); \quad z, w \in \mathbb{C} \quad (3.23)$$

و نستخدم المعادلة (3.11) للحصول على العلاقة الآتية:

$$Q(\lambda, k, \xi_3) \geq \frac{|\xi_3|}{8\pi^2} |E^\beta| - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{E^\beta} \left| \sum_{j: \lambda_j(\Omega) < \lambda} \langle P_{k, \xi_3}(x', \cdot) e^{-i\xi_3}, v_j(\cdot) \rangle_{L^2(\Omega)} v_j(y) \right|^2 dy dx' \quad (3.24)$$

و تتحقق العلاقة:

$$|E^\beta| \geq \beta \frac{16}{5 D(\Omega) \pi^2} R(\Omega)^4 \quad (3.24)$$

و ذلك لأجل $\beta \in (0, R(\Omega)]$ و بالتالي يكون لدينا:

$$Q(\lambda, k, \xi_3) \geq \beta \frac{2|\xi_3|}{5 D(\Omega) \pi^4} R(\Omega)^4$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{E^\beta} \left| \sum_{j: \lambda_j(\Omega) < \lambda} \langle P_{k, \xi_3}(x', \cdot) e^{-i\xi_3}, v_j(\cdot) \rangle_{L^2(\Omega)} v_j(y) \right|^2 dy dx'$$

و هنا علينا تقدير التكامل السالب في الأعلى، و نلاحظ أن التوافقية الخطية لـ v_j (the linear combination) تقع في $d[a]$ ، لذلك يمكن استخدام المتباينة:

$$\int_{E^\beta} |u|^2 dx \leq \beta^2 \int_{\Omega} |\nabla_{\mathbb{H}} u|^2 dx; \quad u \in d[a] \quad (3.25)$$

و بفرض اللحظة التي تكون فيها العلاقة (3.25) محققة فإننا نحصل على العلاقة:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{E^\beta} \left| \sum_{j: \lambda_j(\Omega) < \lambda} \langle P_{k, \xi_3}(x', \cdot) e^{-i\xi_3}, v_j(\cdot) \rangle_{L^2(\Omega)} v_j(y) \right|^2 dy dx' \leq \frac{\beta^2}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\Omega} \left| \sum_{j: \lambda_j(\Omega) < \lambda} \langle P_{k, \xi_3}(x', \cdot) e^{-i\xi_3}, v_j(\cdot) \rangle_{L^2(\Omega)} \nabla_{\mathbb{H}} v_j(y) \right|^2 dy dx'$$

و بالتكامل بالتجزئة و بما أن الدوال الذاتية v_j متعامدة متنى متنى فإنه ينتج:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{E^\beta} \left| \sum_{j: \lambda_j(\Omega) < \lambda} \langle P_{k, \xi_3}(x', \cdot) e^{-i\xi_3}, v_j(\cdot) \rangle_{L^2(\Omega)} v_j(y) \right|^2 dy dx' \leq \frac{\beta^2}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\Omega} \lambda_j(\Omega) |\langle P_{k, \xi_3}(x', \cdot) e^{-i\xi_3}, v_j(\cdot) \rangle_{L^2(\Omega)} v_j(y)|^2 dy dx'$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$\frac{\beta^2 \lambda}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{j: \lambda_j(\Omega) < \lambda} |\langle P_{k, \xi_3}(x', \cdot) e^{-i\xi_3 \cdot}, v_j(\cdot) \rangle_{L^2(\Omega)}|^2 dx'$$

و أخيراً نقوم بالجمع فوق كل z وباستخدام العلاقة (3.17) نحصل على العلاقة:

$$\int_{\mathbb{R}^2} \sum_{j: \lambda_j(\Omega) < \lambda} |\langle P_{k, \xi_3}(x', \cdot) e^{-i\xi_3 \cdot}, v_j(\cdot) \rangle_{L^2(\Omega)}|^2 dx' \leq \frac{|\xi_3| |\Omega|}{2\pi} \quad (3.26)$$

و بتلخيص هذه التقديرات فإننا نصل إلى الحد الأدنى الآتي لـ Q :

$$\begin{aligned} Q(\lambda, k, \xi_3) &\geq \beta \frac{2|\xi_3|}{5D(\Omega)\pi^4} R(\Omega)^4 - \beta^2 \frac{|\xi_3|}{4\pi^2} |\Omega| \lambda \\ &= \beta \frac{|\xi_3|}{8\pi^2} \left(\frac{16R(\Omega)^4}{5D(\Omega)\pi^2} - 2\beta |\Omega| \lambda \right) \end{aligned} \quad (3.27)$$

و الآن لنضع:

$$\beta := \frac{4R(\Omega)^4}{5|\Omega|D(\Omega)\pi^2} \lambda^{-1} \quad (3.28)$$

علينا أن نبين أنه مع هذا الاختيار فإن العلاقة $\beta \leq R(\Omega)$ تكون محققة. و لدينا:

$$\frac{1}{\lambda_1(\Omega)} \leq \frac{3}{8\sqrt{2}} |\Omega|^{\frac{1}{2}} \leq |\Omega|^{\frac{1}{2}} \quad (3.29)$$

و من المبرهنة (1 - 3) و لأجل $\beta = R(\Omega)$ و $\Omega = C_1(0)$ فإنه تنتج العلاقة الآتية:

$$\frac{8}{5\pi^2} \leq |C_1(0)| \quad (3.30)$$

و مما سبق تنتج العلاقة:

$$\beta := \frac{4R(\Omega)^4}{5|\Omega|^{\frac{1}{2}}D(\Omega)\pi^2} = \frac{4|C_{R(\Omega)}(0)|}{5|\Omega|^{\frac{1}{2}}D(\Omega)\pi^2|C_1(0)|} \leq \frac{|C_{R(\Omega)}(0)|^{\frac{1}{2}}}{2D(\Omega)}$$

و من كون $|B_1(0)| \leq 1$ فإننا نستنتج العلاقة:

$$\beta \leq \frac{|C_{R(\Omega)}(0)|^{\frac{1}{2}}}{D(\Omega)} = \frac{R(\Omega)^2 |B_1(0)|^{\frac{1}{2}}}{D(\Omega)} \leq R(\Omega) \quad (3.31)$$

و من ثم نقوم بتعويض (3.28) في (3.27) مما ينتج عنه:

$$Q(\lambda, k, \xi_3) \geq |\xi_3| \lambda^{-1} \frac{4R(\Omega)^8}{25|\Omega|D(\Omega)^2\pi^6} \quad (3.32)$$

و أخيراً نقوم بتقدير مجموع التكامل السالب لـ (3.19):

$$\begin{aligned} &Tr(A(\Omega) - \lambda)_- \\ &\leq \frac{|\Omega|}{96} \lambda^3 \\ &- \lambda^{-1} \frac{4R(\Omega)^8}{25|\Omega|D(\Omega)^2\pi^6} \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda - |\xi_3|(2k-1))_+ |\xi_3| d\xi_3 \end{aligned} \quad (3.33)$$

و بحساب التكامل في الطرف الأيمن باستخدام الفرض $\xi_3(2k-1) = s$ و بالاعتماد على العلاقة (3.18) نحصل على العلاقة:



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^{\infty} (\lambda - \xi_3(2k-1))_+ \xi_3 d\xi_3 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)^2} \int_0^{\infty} s(\lambda-s)_+ ds$$
$$= \frac{\pi^2 \lambda^3}{24}$$

و هذا ما يكمل إثبات المبرهنة.

المراجع

- [1] إبراهيم إبراهيم، ياسين خروف، سهى سلامه، 2019 زمرة هايزنبرغ وبعض تطبيقاتها. مجلة جامعة البعث، سوريا.
- [2] سهى سلامه، 2020 مؤثر لايبلاس الجزئي على زمرة هايزنبرغ وخصائصه الطيفية. المجلة العربية للعلوم و نشر الأبحاث، 10.26389/AJSRP.S181019.
- [3] CELEBI. R, and DRICKS. K, and JORDAN. M, 2015_ The Heisenberg Group And Uncertainty Principle In Mathematical Physics. Ottawa, 24p, 8-15, 19-20.
- [4] Nezza. E, and Palatucci. G, and Valdinoci, E, 2012_ Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces. Bull. Sci. Math. 136. No. 5, 521-573.
- [5] Frank. R, and Geisinger. L, 2011_ Two-term spectral asymptotics for the Dirichlet Laplacian on a bounded domain Mathematical results in quantum physics. World Sci. Publ., Hackensack, NJ, pp, 138-147.
- [6] Folland. G, 1973_ A fundamental solution for a subelliptic operator. Bull. Amer. Math. Soc. 79, 373-376.
- [7] Hansson. A, and Laptev. A, 2008_ sharp spectral inequalities for the Heisenberg Laplacian, Groups and analysis. London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 354, Cambridge Univ, 100-115.
- [8] Hörmander. L, 1967_ Hypoelliptic Second Order Differential Equations. Acta Math. 119, 147-171.
- [9] KISIL. V, 2016_ The Heisenberg Group In Mathematics And Physics. University of Leeds, England, 103p
- [10] Krantz. S, 2009_ Explorations In Harmonic Analysis With Applications To Complex Function Theory And The Heisenberg Group. Birkhäuser Boston Inc, Boston, Ma, 245-260, 292-295.
- [11] Monti. R, 2000_ some properties of Carnot- Carathéodary balls in the Heisenberg group. Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. no. 3, 155-167.
- [12] Rohleder. J, 2019_ Inequalities between Neumann and Dirichlet eigenvalues of Schrödinger operators. Department of Mathematics, Stockholm Univ, 1-4.
- [13] Ruszkowski. B, 2017_ Spectral and Hardy inequalities for the Heisenberg Laplacian. Stuttgart Univ, 30-41.
- [14] THANGAVELU. S, 1998_ Harmonic Analysis On The Heisenberg Group. Birkhäuser, Boston, 191, 1- 7.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

دراسة خواص المفاتيح الداخلية في الدائرة الفيثاغورية واستخدامها في التشفير

أ.د. محمد نور شمه أ.د. عبد الباسط الخطيب د. نجوى أحمد نجوم
جامعة دمشق كلية الهندسة الميكانيكية والكهربائية قسم العلوم الأساسية
جامعة البعث كلية العلوم قسم الرياضيات
وزارة التربية

الملخص:

توليد النقاط الصحيحة داخل الدوائر الفيثاغورية وحساب عدد هذه النقاط وتوظيفها في عمليات تشفير البيانات عند نقلها بين المستخدمين عبر شبكات غير آمنة، حيث الآلية المستخدمة حالياً تعتمد على طريقة RSA وطريقة المنحنيات الناقصية Elliptic Curves وغيرها من الطرائق المعروفة وهذه الطرائق تنسجم بالصعوبة والتعقيد مقارنة باستخدام الدوائر الفيثاغورية وذلك لما لها من الميزات والخصائص، المفيدة في تقليل تكاليف وزمن خوارزمية التشفير (التعقيد الحسابي)،

استعملنا برنامج الحاسوبي بغرض الحصول على نتائج سريعة وفعالة عند حساب عدد النقاط الأساسية وعدد النقاط الصحيحة الواقعة على محيط الدائرة الفيثاغورية وفي داخلها وخاصةً عند التعامل مع أنصاف أقطار كبيرة.

الكلمات المفتاحية: الأعداد الفيثاغورية، الدائرة الفيثاغورية، النقاط الصحيحة، الثلاثية الفيثاغورية (PT)، الثلاثية الفيثاغورية الأولية (PPT)، المنحنيات الناقصية، النظير الضربي، النص الأصلي، النص المشفر، نقطة المفتاح.

Study the properties of the internal keys in the Pythagorean circuit and their use in encryption

Prof. Abdulbasit Alkhatib

Prof. Mohammad Nour Shamma

Department of Mathematics

Department of Fundamental Sciences

Faculty of Sciences

Faculty of Mechanical & Electrical Eng.

Al-Baath University

University of Damascus

Abstract

This research presents the mechanism of generating correct points on a Pythagorean circle in addition to the calculation the number of these points and employing them in data decryption processes when transferring these points amongst users via insecure networks. The currently-used method depends on elliptic curves which are difficult and complex in comparison to the use of Pythagorean circles due to its features, which help reduce the cost and time of Encryption Algorithm (Computational Complexity).



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

Finally, it used a modern programming MATLAB to write a computer program in order to reach quick and effective results .

Keywords:Pythagorean numbers, Pythagorean Circle, Correct Points, Pythagorean Triple (PT), Prime Pythagorean Triple (PPT), Basic Prime Pythagorean Triple (BPPT), Elliptic Curve, Symmetric Product, Plain text, Cipher Text, Encryption, Decryption, Key Point.

تعريف أساسية :

النظير الضربي (Symmetric Product) [23]:

ليكن $a \in \mathbb{Z}_n$; $n \in \mathbb{N}^*$ حيث $\gcd(a, n) = 1$ ، عندئذ يسمي العدد $b \in \mathbb{Z}_n$ بالنظير الضربي للعدد a بالمقاس n إذا حقق الشرط التالي:

$$a \cdot b = b \cdot a \equiv 1 \pmod{n}$$

مبرهنة أولر (Euler's theorem) [26]:

ليكن a, n عددين صحيحين موجبين حيث $\gcd(a, n) = 1$ عندئذ: $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$

مبرهنة Shamma-1 [1], [3]:

ليكن b نظير ضربي للعدد a بالمقاس n عندئذ يكون $(n - b)$ هو نظير ضربي للعدد $(n - a)$ بالمقاس n . أي إذا كان: $a \cdot b \equiv 1 \pmod{n}$ عندئذ يكون:

$$(n - a)(n - b) \equiv 1 \pmod{n}$$

النقطة الأساسية:

هي نقطة صحيحة (x, y) تقع في الثمن الأول من الدائرة الفيثاغورية في المستوى الإحداثي، أي أن مركباتها تحقق المتراجحة التالية:

$$x > y$$

الثلاثية الفيثاغورية الأساسية Basic Pythagorean Triple:

هي ثلاثية من الأعداد الطبيعية تحقق العلاقة (1) $x^2 + y^2 = z^2$ ويكون فيها: $x > y$ أي تقع في الثمن الأول من المستوى XOY ويرمز لها (BPT).

مثال (1):

الثلاثية (12, 5, 13) هي ثلاثية فيثاغورية أساسية لأن:



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$(12)^2 + (5)^2 = (13)^2, \quad x > y ; \quad x = 12, \quad y = 5$$

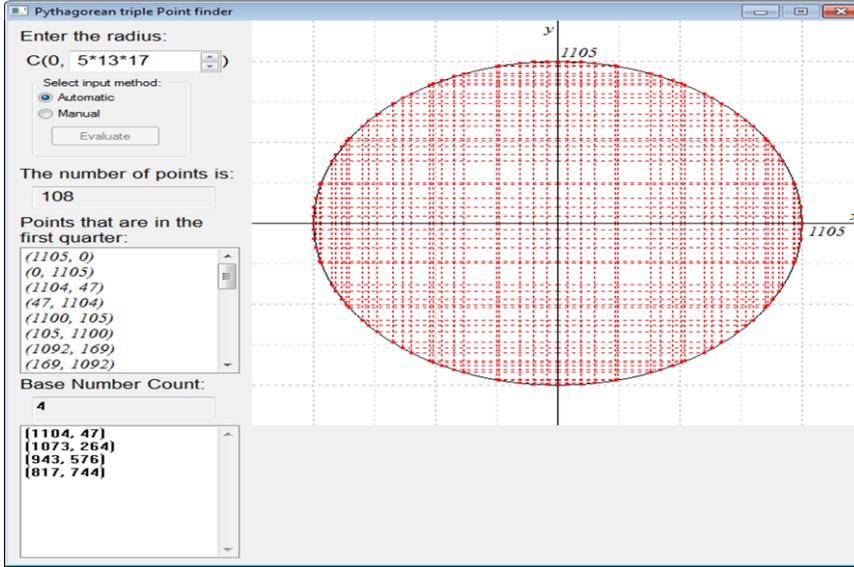
مبرهنة (اختبار) Shamma-2

الشرط اللازم والكافي حتى يكون العدد $R \in \mathbb{N}$ عدداً فيثاغورياً هو وجود عدد طبيعي $n \in \mathbb{N}$ ينتمي إلى المجال:

$$n \in \left] \sqrt{R/2}, \sqrt{R} \right[$$

بحيث يكون: $\sqrt{R - n^2} \in \mathbb{N}$ ، وتكون الثلاثية الفيثاغورية المتولدة هي:

$$(x, y, z) = \left(2n\sqrt{R - n^2}, \quad |2n^2 - R|, \quad R \right)$$





المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 آب 2024
دمشق - سورية

الشكل النقاط الصحيحة والنقاط الأساسية على الدائرة الفيثاغورية $C(1105)$.

تعريف المفتاح K داخل الدائرة الفيثاغورية $C(R)$:

نقطة المفتاح: هي كل نقطة $K(a, b)$ تقع داخل الربع الأول من $\overline{C}(R)$ وتحقق:

$$\gcd(\|K\|, R) = \gcd(a^2 + b^2, R) = 1$$

وذلك حتى يُتمكن من إيجاد المقلوب للنقطة K .

مثال (2):

لتكن الدائرة الفيثاغورية $C(5)$ إن النقطة $K_1 = (1, 1)$ تشكل مفتاحاً في الدائرة $C(5)$ لأن:

$$\gcd(\|K_1\|, R) = \gcd(1^2 + 1^2, 5) = \gcd(2, 5) = 1$$

بينما النقطة $K_2 = (1, 2)$ لا تشكل مفتاحاً لأن:

$$\gcd(\|K_2\|, R) = \gcd(1^2 + 2^2, 5) = \gcd(5, 5) = 5 \neq 1$$

5-7 خصائص المفتاح الواقع داخل الدائرة الفيثاغورية $C(R)$:

1. لكل مفتاح $K(a, b)$ مفتاح عكسي $K^{-1}(a_1, b_1)$ يقع أيضاً داخل الدائرة $C(R)$ ويكون:

$$K^{-1} = \frac{1}{K} = \frac{(1, 0)}{(a, b)} = \frac{(1, 0)}{(a, b)} \odot \frac{(a, -b)}{(a, -b)} = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$$

ومنه يكون:

$$K \cdot K^{-1} = (a, b) \odot \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right) = \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2}, \frac{-ab + ab}{a^2 + b^2} \right) = (1, 0) = 1$$

ومنه يكون:

$$K \cdot K^{-1} = K^{-1} \cdot K$$

مثال (3)

لتكن الدائرة الفيثاغورية $C(5)$ والمفتاح $K(1, 1)$ عندئذ يكون المفتاح العكسي:

$$K^{-1} = \frac{(1, -1)}{2} \bmod 5 = \frac{(1, 4)}{2} \bmod 5 = 3(1, 4) \bmod 5 = (3, 12) \bmod 5 = (3, 2)$$

ويُلاحظ أن:

$$K \cdot K^{-1} = (1, 1) \odot (3, 2) = (3 - 2, 2 + 3) = (1, 5) \bmod 5 = (1, 0) \bmod 5 = 1$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

2. جداء أي مفتاحين $K_1(a_1, b_1)$, $K_2(a_2, b_2)$ من $C(R)$ هو مفتاح جديد $K(a, b)$ يقع داخل الدائرة $C(R)$ ، لأنه من تعريف عملية الضرب يكون:

$$\|K_1 \cdot K_2\| = \|K_1\| \cdot \|K_2\|$$

قسمة أي مفتاحين $K_1(a_1, b_1)$, $K_2(a_2, b_2)$ من $C(R)$ هو مفتاح جديد $K(a, b)$ يقع داخل الدائرة $C(R)$.

4. مجموع (طرح) أي مفتاحين $K_1(a_1, b_1)$, $K_2(a_2, b_2)$ ليس بالضرورة مفتاحاً داخل $C(R)$.

5. ضرب أي مفتاح $K(a, b)$ بعدد α حيث: $\gcd(\alpha, R) = 1$ هو مفتاح جديد ضمن $C(R)$.

6. إذا كان $K(1, 1)$ مفتاحاً من $C(R)$ فإن جميع النقاط الواقعة على منصف الربع الأول $M(\alpha, \alpha)$ حيث: $\gcd(\alpha, R) = 1$ تشكل مفتاحاً أيضاً.

تشكيل المفتاح من مفتاحين مختلفين:

يقوم الطرفان المتراسلان Bob, Alice باختيار نقطتين داخليتين قابلتين للقلب (مفتاحين مختلفين) دون أن يعلم أحدهما مفتاح الآخر.

فتختار Alice النقطة $A(x_1, y_1)$ حيث:

$$\gcd(\|A\|, R) = 1$$

ويختار Bob النقطة $B(x_2, y_2)$ حيث:

$$\gcd(\|B\|, R) = 1$$

يتفق الطرفان على مفتاح (نقطة داخلية تحقق شرط المفتاح) $I(x, y)$ ، تقوم Alice بالعملية $A \cdot I$ وترسلها إلى Bob، ثم يقوم Bob بالعملية $A \cdot I \cdot B$ ويرسلها إلى Alice، فيتشكل المفتاح التالي:

$$K(a, b) = A \cdot I \cdot B$$

وهو يملك نظيراً ضربياً لأن كلاً من A, I, B تعد مفاتيح أصلاً، ويُعلم أن جداء أي مفتاحين هو مفتاح أيضاً.

تصنيف النقاط في الدائرة الفيثاغورية $C(R)$.

النقاط الداخلية:

هي النقاط التي تقع داخل المربع الصغير، وتحقق المترابحة التالية:

$$a^2 + b^2 < 2(R - 1)^2$$

يرمز لعدد النقاط الداخلية بالرمز $N_i = N(i)$ وبحسب هذا العدد وفق العلاقة:

$$N(i) = (R - 1)^2 - p - 1$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

ويكتب اختصاراً:

$$N(i) = R(R - 2) - p ; p = 2m$$

2-2-5 النقاط المحيطية:

يرمز لها بـ p وهي النقاط التي تقع على محيط الدائرة $C(R)$ (النقاط الصحيحة الواقعة على المحيط وقد درست بالتفصيل في الفصول السابقة)، وتحقق المساواة التالية: $a^2 + b^2 = R^2$.

2-2-5 النقاط الخارجية:

هي النقاط التي تقع خارج الدائرة $C(R)$ وداخل المربع الكبير، وتحقق هذه النقاط المتراجحة التالية:

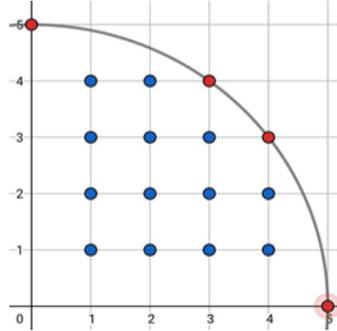
$$2(R - 1)^2 \leq a^2 + b^2 \leq 2R^2 \Rightarrow (R - 1)^2 \leq \frac{a^2 + b^2}{2} \leq R^2$$

ويرمز لعدد هذه النقاط بالرمز $N_E = N(E)$ ويحسب وفق العلاقة التالية:

$$N(E) = N(C) - [N(i) + p] = R^2 - [R(R - 2) - p + p] = R^2 - R^2 + 2R = 2R$$

مثال (4):

بفرض الدائرة الفيثاغورية $C(5)$ أي إن $R = 5$.



الشكل 2-5: الدائرة الفيثاغورية $C(5)$.

يُلاحظ أن النقاط الداخلية تحقق المتراجحة:

$$a^2 + b^2 < 2(R - 1)^2 = 2(5 - 1)^2 \Rightarrow a^2 + b^2 < 32$$

والنقاط الخارجية تحقق المتراجحة التالية:

$$2(R - 1)^2 \leq a^2 + b^2 \leq 2R^2 \Rightarrow$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$(R - 1)^2 < \frac{a^2 + b^2}{2} \leq R^2 \Rightarrow$$

$$(5 - 1)^2 < \frac{a^2 + b^2}{2} \leq (5)^2 \Rightarrow$$

$$16 < \frac{a^2 + b^2}{2} \leq 25$$

حساب عدد النقاط الداخلية:

$$N(i) = (R - 1)^2 - p - 1 = (5 - 1)^2 - 2 - 1 = 16 - 2 - 1 = 13$$

أو تحسب من العلاقة المختصرة كما يلي:

$$N(i) = R(R - 2) - p = 5(5 - 2) - 2 = 15 - 2 = 13$$

حيث إن عدد النقاط المحيطة للدائرة $C(5)$ الواقعة في الربع الأول هي:

$$p = 2m = 2 \times 1 = 2$$

حيث إن النقاط المحيطة هي:

$$p_1(x_1, y_1) = (3, 4), \quad p_2(x_2, y_2) = (4, 3)$$

عدد النقاط الكلي:

$$N(C) = R^2 = (5)^2 = 25$$

بعد حساب عدد النقاط الكلي وعدد النقاط الداخلية وعدد النقاط المحيطة أصبح بالإمكان حساب عدد النقاط الخارجية، حيث عدد النقاط الخارجية يساوي عدد النقاط الكلي مطروحاً منه عدد النقاط الداخلية والمحيطة، ويحسب كما يلي:

$$N(E) = N(C) - [N(i) + p] = R^2 - [R(R - 2) - p + p] = R^2 - R^2 + 2R = \\ = 2R = 2(5) = 10$$

أو يحسب اختصاراً وفق العلاقة:

$$N(E) = 2R = 2(5) = 10$$

4-2-5 تعريف رتبة العدد: [26]

إن مرتبة أو رتبة العدد a بالمقاس R حيث $\gcd(a, R) = 1$ هي أصغر عدد صحيح موجب $e \neq 0$ يحقق العلاقة:



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$a^e \equiv 1 \pmod{R}$$

5-2-5 تعريف الجذر المولد:

الجذر الأولي (المولد): إذا كان $\gcd(a, R) = 1$ وكانت مرتبة العدد a بالمقاس R تساوي $\Phi(R)$ فإن العدد a يسمى جذراً أولياً (مولداً) للعدد R .

بكلام آخر: إذا كان $\Phi(R)$ أصغر عدد صحيح موجب يحقق العلاقة:

$$a^{\Phi(R)} \equiv 1 \pmod{R}$$

وكان $\gcd(a, R) = 1$ عندئذ a هو جذر أولي (مولد) للعدد R .

ومن أجل R عدد طبيعي أولي يكون: $\Phi(R) = R - 1$

ملاحظة: يمكن أن يكون للعدد R عدة مولدات ويمكن أن لا يوجد له أي مولد.

مثال (5):

العدد $R = 13$ يملك أربعة مولدات حيث يوجد للمعادلة التالية:

$$a^{\Phi(13)} \equiv 1 \pmod{13} \Leftrightarrow a^{12} \equiv 1 \pmod{13}$$

أربعة حلول هي: $\{2, 6, 7, 11\}$.

ملاحظة:

بما أنه لا يوجد أي عدد مرتبته تساوي (4) بالمقاس $R = 12$ ، وكذلك $\Phi(12) = 4$ ومنه لا يوجد للعدد (12) أي مولد.

أي إن المعادلة التالية ليس لها أي حلول:

$$a^{\Phi(12)} \equiv 1 \pmod{12} \Leftrightarrow a^4 \equiv 1 \pmod{12}$$

5-2-6 ميرهنة عدد المولدات: [26]

عدد مولدات أي عدد أولي P يعطى بالعلاقة:

$$\Phi[\Phi(P)] = \Phi[P - 1]$$

حيث إن Φ هي دالة أولر.

مثال (6):

من أجل العدد الأولي $P = 13$ يكون:



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$\Phi(p) = p - 1 \Rightarrow \Phi(13) = 12$$

ومنه يكون عدد مولداته هو:

$$\Phi(P - 1) = \Phi(12) = 4$$

وإذا حصل على واحد فقط من هذه المولدات الأربع يستطاع الحصول على جميع المولدات الباقية.

7-2-5 كيف الحصول على أحد المولدات:

أولاً يجرب أحد الأعداد الفردية إضافة إلى العدد (2) وليكن العدد a وتحسب قوى هذا العدد حتى القوة $(n/2)$ في حال عدم الحصول على نقاط مكررة يكون العدد a مولداً للعدد الأولي P .

ليكن العدد الأولي $p = 13$ وليجرب العدد $a = 2$ يكون:

$$a^0 = 1, \quad a^1 = 2, \quad a^2 = 4, \quad a^3 = 8, \quad a^4 = 16 \bmod 13 = 3,$$
$$a^5 = 32 \bmod 13 = 6, \quad a^6 = 64 \bmod 13 = 12, \quad a^7 = 128 \bmod 13 = 11$$

لم يتم الحصول على أي قيمة مكررة ومنه يكون $g = 2$ مولداً للعدد الأولي $P = 13$.

8-2-5 ميرهنة باقي المولدات: [26]

ليكن P عدد أولي و g أحد مولداته عندئذ باقي المولدات يُحصل عليها من العلاقات التالية:

$$g^{b_1}, g^{b_2}, \dots, g^{b_{\Phi(p-1)}}$$

حيث:

$$\gcd[(b_1, b_2, \dots, b_{\Phi(p-1)}), \Phi(p)]$$

مثال (7):

ليكن العدد الأولي $P = 13$ ، بدايةً يُعلم أن عدد المولدات يعطى بالعلاقة:

$$\Phi(\Phi(P)) = \Phi(P - 1) = \Phi(12) = 4$$

ومنه يوجد أربع مولدات ولإيجادها، نجد أن: $g = 2$ هو مولد للعدد الأولي $P = 13$.

إن:

$$\Phi(P) = \Phi(13) = 12 \Rightarrow M_{\Phi(P)} = \{1, 5, 7, 11\}$$

حيث: $M_{\Phi(P)}$ هي مجموعة الأعداد الأولية نسبياً مع $\Phi(p)$ ومنه باقي المولدات تكون:

$$2^1 = 2,$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$2^5 \bmod 13 = 6,$$

$$2^7 \bmod 13 = 11,$$

$$2^{11} \bmod 13 = 7$$

مثال (8):

بفرض الدائرة الفيثاغورية $C(5)$ ولإيجاد النقاط المتولدة عن النقطتين المحيطيتين:

$$p_1(x_1, y_1) = (3, 4), \quad p_2(x_2, y_2) = (4, 3)$$

حيث يوجد مولدان لنصف القطر $R = 5$ هما: $g_1 = 2$, $g_2 = 3$ ، مع ملاحظة أن:

$$g_1 \cdot g_2 = 1 \bmod R$$

لإيجاد النقاط المتولدة عن النقاط المحيطية:

فمن أجل النقطة المحيطية الأولى: $p_1(x_1, y_1) = (3, 4)$ والمولد $g_1 = 2$ يكون:

$$(3, 4) \xrightarrow{\times 2} (6, 8) \bmod 5 = \begin{pmatrix} 1, 3 \\ (1) \end{pmatrix} \xrightarrow{\times 2} (2, 6) \bmod 5 = \begin{pmatrix} 2, 1 \\ (2) \end{pmatrix} \xrightarrow{\times 2} \begin{pmatrix} 4, 2 \\ (3) \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\times 2} (8, 4) \bmod 5 = (3, 4)$$

ومن هنا النقاط المتولدة هي:

$$(1, 3), \quad (2, 1), \quad (4, 2)$$

ومن أجل المولد الثاني $g_2 = 3$ يكون:

$$(3, 4) \xrightarrow{\times 3} (9, 12) \bmod 5 = \begin{pmatrix} 4, 2 \\ (1) \end{pmatrix} \xrightarrow{\times 3} (12, 6) \bmod 5 = \begin{pmatrix} 2, 1 \\ (2) \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{\times 3} (6, 3) \bmod 5 = \begin{pmatrix} 1, 3 \\ (3) \end{pmatrix} \xrightarrow{\times 3} (3, 9) \bmod 5 = (3, 4)$$

والنقاط المتولدة هي:

$$(4, 2), \quad (2, 1), \quad (1, 3)$$

ويلاحظ أن النقاط المولدة هي نفسها لكن بترتيب مختلف.

من أجل النقطة المحيطية الثانية $p_2(x_2, y_2) = (4, 3)$ والمولد الأول $g_1 = 2$ يكون:



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$(4, 3) \xrightarrow{(1)} (8, 6) \pmod{5} = (3, 1) \xrightarrow{(2)} (6, 2) \pmod{5} = (1, 2) \\ \xrightarrow{(3)} (2, 4) \xrightarrow{(4)} (4, 8) \pmod{5} = (4, 3)$$

والنقاط المتولدة هي:

$$(3, 1), \quad (1, 2), \quad (2, 4)$$

يُلاحظ تكرار النقطة المحيطة وانقطاع التوليد قبل الحصول على $(R - 1)$ نقطة ومنه $a = 4$ ليس مولداً لنصف القطر R .

مبرهنة النقاط غير المفتاحية:

النقاط الداخلية المتولدة عن النقاط المحيطة عن طريق مولد g ليست نقاطاً مفتاحية.

الإثبات:

بفرض النقطة (x, y) نقطة محيطة و g مولد لنصف القطر R عندئذ تكون النقطة المولدة بالمولد g هي (gx, gy) فإن:

$$\gcd(g^2x^2 + g^2y^2, R) = \gcd[g^2(x^2 + y^2), R] = \gcd(g^2R^2, R) = R \neq 1$$

ومنه النقطة المتولدة (gx, gy) ليست مفتاحية، لأنها لا تحقق شرط النقطة المفتاحية. وُجد فيما سبق أنه إذا كانت الدائرة الفيثاغورية $C(R)$ وبفرض أنها تملك p نقطة محيطة عندئذ يكون عدد النقاط الداخلية اللافكاحية المتولدة عن النقاط المحيطة يساوي $N(g) = p(R - 2)$ ومنه يكون عدد المفاتيح $N(R)$ في الدائرة $C(R)$ يعطى بالعلاقة:

$$N(R) = N(i) - N(g) = R(R - 2) - p - p(R - 2) = R^2 - 2R - p - p.R + 2p = \\ = R^2 - 2R - p.R + p = (R - 2)(R - p) - p$$

مثال (9):

بفرض الدائرة الفيثاغورية $C(13)$ حيث $R = 13$ عندئذ يكون عدد المفاتيح:

$$N(R) = N(i) - N(g) = (R - 2)(R - p) - p = (13 - 2)(13 - 2) - 2 = 119$$

الجدول التالي يوضح عدد المفاتيح لبعض الدوائر الفيثاغورية.

نصف القطر	عدد النقاط المحيطة	عدد النقاط المفتاحية
الفياثاغوري R	في الربع الأول p	في الربع الأول $N(R)$
5	2	7



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

13	2	119
17	2	223
25	4	479
61	2	3479
125	6	14631
625	8	384383

التشفير باستخدام الدوائر الفيثاغورية $C(R)$.
تعطى علاقة التشفير بالعلاقة التالية:

$$Y = (K \cdot X + C) \bmod R \quad (1)$$

حيث:

$K(a, b)$: المفتاح المستخدم في عملية التشفير.

$X(x_1, x_2)$: النص الأصلي.

$C(c_1, c_2)$: نقطة الانزياح.

من العلاقة (1) يستطاع كتابة:

$$Y = (a, b) \odot (x_1, x_2) + (c_1, c_2) = (ax_1 - bx_2, ax_2 + bx_1) + (c_1, c_2) = \\ = (ax_1 - bx_2 + c_1, ax_2 + bx_1 + c_2)$$

5-6-1 شكل آخر للنقاط الصحيحة (الشكل المصفوفي):
يمكن تمثيل النقاط الصحيحة (a, b) مصفوفياً حيث تأخذ الشكل التالي:

$$(a, b) = \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

مثال (10):

ليكن النص الأصلي المراد تشفيره هو $X(33, 35)$ ، وعملية التشفير ستم على الدائرة الفيثاغورية $C(65)$ ، وبمفتاح $K(5, 3)$ ونقطة الانزياح $C(5, 7)$.

الحل:



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

بدايةً يُتحقق من صلاحية المفتاح $K(5, 3)$ بالمقاس $R = 65$ وفق ما يلي:

$$\gcd(\|K\|, R) = \gcd(34, 65) = 1$$

ومنه المفتاح $K(5, 3)$ يصلح لعملية التشفير.

الآن بتطبيق علاقة التشفير (1) يكون:

$$Y = (K \cdot X + C) \bmod R \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} Y &= [(5, 3) \odot (33, 35) + (5, 7)] \bmod 65 = \\ &= (5 \times 33 - 3 \times 35 + 5, 5 \times 35 + 3 \times 33 + 7) \bmod 65 = \\ &= (65, 281) \bmod 65 = (0, 21) \end{aligned}$$

وهو النص المشفر رقمياً.

ستعاد عملية التشفير لكن بالاعتماد على الطريقة المصفوفية، حيث النص الأصلي المراد تشفيره هو $X = \begin{bmatrix} 33 \\ 35 \end{bmatrix}$ ، وعملية التشفير ستتم على الدائرة الفيثاغورية $C(65)$ ، والمفتاح $K = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ ونقطة الانزياح $C = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$.

يُعوّض ما سبق في العلاقة (2) يكون:

$$Y = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 33 \\ 35 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 60 \\ 274 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 65 \\ 281 \end{bmatrix} \bmod 65 = \begin{bmatrix} 0 \\ 21 \end{bmatrix}$$

وهو النص المشفر رقمياً.

بالانتقال لعملية فك التشفير والتي يمكن إنجازها بطريقتين:

بعد أن حصل A على النص المشفر رقمياً يقوم B بفك التشفير وفق العلاقة العكسية:

$$X = K^{-1}[Y - C] \bmod R \quad (3)$$

فيحصل على النص الأصلي رقمياً، وطريقتنا فك التشفير يبينها المثال التالي.

مثال (11):

لتكن الدائرة الفيثاغورية $C(65)$ لفك تشفير النص المشفر رقمياً $Y = (0, 21)$ وفق المفتاح $K(5, 3)$ ونقطة الانزياح $C(5, 7)$.

الحل:

سنعتمد على عملية فك التشفير أي الطريقة المصفوفية.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

حيث سيتم فك تشفير النص المشفر رقمياً $Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 21 \end{bmatrix}$ وفق المفتاح $K = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ ، ونقطة الانزياح $C = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$.

وجد مما سبق أن:

$$K^{-1} = (25, 63)$$

أصبحت المعطيات:

$$K^{-1} = \begin{bmatrix} 25 \\ 63 \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 21 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

بتطبيق العلاقة (4):

$$X = \begin{pmatrix} 25 & -63 \\ 63 & 25 \end{pmatrix} \times \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 21 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} 25 & -63 \\ 63 & 25 \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} -5 \\ 14 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1007 \\ 35 \end{bmatrix} \bmod 65 = \begin{bmatrix} 33 \\ 35 \end{bmatrix}$$

وهو النص الأصلي رقمياً.

نتيجة 2:

إن الطريقة المصفوفية المعرفة بالعلاقات (4), (2) هي طريقة أكثر ملائمة من الناحية البرمجية.

أخيراً يضغط على (Encryption) فيحصل على النص المشفر كما يلي:

الشكل 5-9: إنجاز عملية التشفير والحصول على النص المشفر.

Form1

N: 5 Set Parameters

R: 325

C:

1				
5				
6				
*				

Key:

1				
3				
7				
*				

X:

1	2	3	4	5
1	1	0	0	1
0	0	1	1	0
*				

Y:

1	2	3	4	5
8	8	323	323	8
13	13	9	9	13
*				

Encryption Decryption



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

• الخلاصة:

قمنا في هذا الفصل بإثبات مبرهنة حول انتماء النقطة (x, y) إلى الدائرة $\bar{C}(R)$ أو إلى المربع خارج الدائرة، ومبرهنة لإثبات أن النقاط المحيطة ليست مفتاحية، ومبرهنة لإثبات أن جميع النقاط الداخلية المتولدة عن النقاط المحيطة ليست مفتاحية وتبين عدد هذه النقاط.

كما قدمنا في البحث آلية تطبيق عملي وشرح مفصل لعمليتي التشفير وفك التشفير على الدوائر الفيثاغورية باستخدام النقاط الصحيحة الواقعة عليها وبداخلها والتي تم توليدها ومعرفة عددها .

المراجع

1. Al Khatib and Shamma, **An Algorithm for Determining a Relatively Prime Number and its Symmetric Product with Base n** , Journal of Natural Sciences and Mathematics (JNM) Vol. 3 No.1 (2009).
2. Al Khatib and Shamma, **Arab Encryption Developer**, Journal of AL-Baath University for Engineering Science, Vol. 30 No. 17 (2008).
3. Al Khatib and Shamma, **Generating Basic Pythagorean Triples from Private Integers**, Journal of AL-Baath University, Vol. 38 (2016).
4. Al Khatib and Shamma, **On the Modern Cryptology Method of Hill for Encoded Letters with ASCII System**, Far East Journal of Mathematical Education (FJME) Vol. 3 No. 2 (2009) June, pp. 183–193.
5. Al Khatib and Shamma, **The Encryption Using Special Pythagorean Function**, Journal of AL-Baath University, Vol. 38 (2016).
6. Al Khatib and Shamma, **The Encryption Using the Operator Integration Applied to the System ASCII Encoded Messages**, Journal of AL-Baath University, Vol. 38 (2015).
7. B. Schneier, **Applied Cryptography**, 2th edition, Protocols, Algorithms and Source Coding in C (John Wiley & Sons), 1996.
8. Bruen, Aiden A. & Forcinito, Mario A. **“Cryptography, Information Theory, and Error-Correction”** A Handbook for the 21st Century, (2011).
9. Dawson Shores, **The Evolution of Cryptography Through Number Theory**, November 30, 2020.
10. E. Okeyinka, **“Computational Speeds Analysis of RSA and ElGamal Algorithms on Text Data”**, Proceedings of the World Congress on Engineering and Computer Science, Vol. I, WCECS October 21-23, 2015, San Francisco, USA.
11. Jeffrey Hoffstein, Jill Pipher, Joseph H. Silverman, **“An Introduction to Mathematical Cryptography”** Brown University, Providence, USA, (2014), pages 1-59.
12. M. B. Kabil and D. Al-Husseiny, **“Number Theory”** Damascus University Pub. (Arabic Version), 2012.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

13. Mahnaz Mohammadi, Alireza Zolghadr, and Mohammad Ali Purmina, “**Comparison of Two Public Key Cryptosystems**”. Journal of Optoelectrical Nanostructures, Vol. 3, No. 3, 2018.
14. O. Goldreich, “**Foundations of Cryptography Basic Applications**”, Cambridge University Press 2009.
15. Pawanveer Singh, Dr. Amanpreet Singh, and Shelja Jhamb, **Importance of Number Theory in Cryptography**, Jarse, Vol. I, No. 6, Issue No. 1, January 2017.
16. Perna Mahajan & Abhishek Sacheva, “**A Study of Encryption Algorithms AES, DES and RES for Security**”, Global Journal of Computer Science and Technology Network, Web & Security Vol. 13 Issue 15 V.1.0 (2013).
17. Richard E. Klima, Neil P. Sigmon, **Cryptology: Classical and Modern with Maplets**, CRC Press, Boca Raton, 2012.
18. S. S. Al-Riyami, “**Cryptographic Schemes Based on Elliptic Curve Pairings**”, Thesis, University of London, 2004.
19. SANS Institute - InfoSec Reading Room, “**History of Encryption**”, 2001.
20. Song Y. Yan, “**Computational Number Theory and Modern Cryptography**”, 1st edition, Wiley, 2013.
21. Stefano Spezia, **Number Theory with Applications to Cryptography**, Publisher Arcler Press (November 1, 2019).
22. Steven Galbraith, **Some applications of mathematics in cryptography**, December 4, 2021 1/51, Mathematics Department, University of Auckland, New Zealand.
23. Swapan Kumar Sarkar, S. Chand & Company Ltd, **A Text Book of Discrete Mathematics**, New Delhi 110055, 2008.
24. W. Stallings, **Cryptography and Network Security, Principle and Practice**, Sixth edition, 2014.
25. Wenbo Mao Hewlett-Packard Company, **Modern Cryptography Theory and Practice**, 2004.
26. William Easttom, **Modern Cryptography: Applied Mathematics for Encryption and Information Security**, Springer, 2020.

المراجع العربية

[27] د. محمد نور شمه ود. ريما مأمون القمحة ومريم خالد النديري، دراسة تحويل بعض خوارزميات التشفير الكلاسيكي إلى دوال عددية، جامعة دمشق، 2017-2018.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

[28] التشفير "التعمية" بطريقة فيجينير المعدلة، د. محمد نور شمه ود. عبد الباسط الخطيب، مجلة جامعة البعث للعلوم الهندسية مجلد /30/ عدد /17/ 2008.

[29] د. محمد نور شمه ود. إبراهيم كيالي، توليد ثلاثيات فيثاغورية أولية من أعداد ذات طبيعة خاصة، جامعة البعث مجلد/38/ عام 2018.

Dynamical Behavior of an Ecological System with Diverse Functional Response

Saba Noori Majeed¹

¹Department of Computer, College of Education for Women, University of Baghdad, Baghdad, Iraq

Abstract

The dynamical behavior of an ecological system is suggested and discussed in a model consist of two predators-one prey with diverse functional response, the first predator functional response is Beddington –De Angelis, while the second predator functional response is Holling type II, mathematical features have been studied thoroughly, the system have local and global stability when especial conditions are satisfied had been proved respectively, the system has no saddle node bifurcation but transcritical bifurcation and Pitchfork bifurcation are satisfied while Hopf bifurcation does not occur. Additionally, numerical illustrations are performed finally in order to set the applicability of the model under consideration.

1.Introduction

In most biological societies, we find that Prey can be intercepted by more than one predator terms of species, there is a predator that depends on attaining the prey by searching alone or following the method of pack hunting of the prey with its peers of the same type and probably storing the remains of the prey to hoard food for another time, and those different predator societies there is a rivalry among them to obtain food (prey) and one of those predators maybe subjected to annihilation by the other kind. Lotka–Volterra [1,2] model is the classical description interact between species which incorporate logistic growth for a prey population and the predator population. (Functional response formulates the feeding rate per predator on the prey population). Lotka–Volterra



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

model was the key portion for researchers to investigate the kinetics of the model in a more realistic way population's functional response. Holling-type functional response describes the predation speed within a regular range, it is classified into three types Holling's type I,II and III , see [3-9]. The functional response of Beddington-DeAngelis is similar to the Holling type-II functional response but it contains a term describing the mutual interference of predators. see [10-13]. In this research, we will study the dynamic of an ecological system connect three species combined with environmental conditions compatible despite qualitative differences through, this system consist of one prey and two varying types of predators behave in diverse functional response. The first predator functional response is Beddington –De Angelis ,while the second predator's functional response is Holling type II. An analytical study includes local and global stability of the dynamical system had been introduced, also the bifurcation analysis for certain equilibrium points explained. According to above the resulting system was packed with parameters, which reduced using dimensionless technique to simplify the study while preserving carefully the mathematical properties studied. A numerical demonstration is illustrated with the help of MATLAB.

2. Mathematical Model

In this section a Beddington–De Angelis and Holling type II prey-predator model considered is based on the(two predator- one prey):

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= r \left(1 - \frac{x_1}{x_1+k}\right) - \frac{\gamma x_1 x_2}{a+x_1+b_1 x_2} - \frac{\beta x_1 x_3}{1+b_2 x_3} \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\delta_1 x_2 + \frac{c_1 \gamma x_1 x_2}{a+x_1+b_1 x_2} - d_1 x_2 x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} &= -\delta_2 x_3 + \frac{c_2 \beta x_1 x_3}{1+b_2 x_3} - d_2 x_2 x_3\end{aligned}\quad (2.1)$$

It is considered that the first and second predator species, respectively are comotation for food and other essential resources such as shelter and water sources.

Where

- i. $x_1(t) = x_1$ is the prey population size at time t .
- ii. $x_2(t) = x_2, x_3(t) = x_3$, are the population size of the first and second predator species at time t ,the prey grows logistically in the absence of the predator, in the same way that the predator declines directly in the absence of the prey.
- iii. r, k are respectively the growth rate and the environmental carrying capacity of the prey species.
- iv. d_1, d_2 are the predator death rates.
- v. δ_1, δ_2 are the rates at which the growth rate of the first predator is annihilated by the second predator and vice versa.
- vi. c_1, c_2 are the conversion factor denoting the number of newly born of the first and second predator for each captured prey species respectively ($0 < c_1, c_2 < 1$).
- vii. β, γ are the maximum number of the prey that can be eaten by the first and second predator per unit time respectively, $\frac{1}{a}$ is the half saturation rate of the first predator.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

- viii. b_1, b_2 measure the coefficients of their mutual interference among the first and second predator respectively.
- ix. The term $\frac{\gamma x_1 x_2}{a+x_1+b_1 x_2}$ is the Beddington–De Angelis functional response of the first predator.
- x. The term $\frac{c_2 \beta x_1 x_3}{1+b_2 x_3}$ is the Holling type II functional response of the second predator.
- xi. $\frac{\gamma}{a}$ The maximum number of prey can be eaten by the first predator.
- xii. $\frac{\beta}{b_2}$ The maximum number of prey can be eaten by the second predator.

Where $r, k, d_1, d_2, \delta_1, \delta_2, \beta, \gamma, b_1, b_2$ are all positive real numbers and $a > 0$.

The next step is number of parameters and specify the control set of parameters reduced, so in order to simplify the system, the following dimensionless variables and parameters are used:

$$S = \frac{x_1}{k}, \quad P_1 = \frac{\delta x_2}{rk}, \quad P_2 = \frac{\beta x_3}{rk}, \quad t = r\tau, \quad \frac{dx_1}{dt} = rk \frac{dS}{d\tau}, \quad \frac{dP_1}{dt} = \frac{\gamma}{r^2 k} \frac{dx_2}{d\tau}, \quad \frac{dP_2}{dt} = \frac{\beta}{r^2 k} \frac{dx_3}{d\tau}, \quad A_1 = \frac{a}{k}, \quad \epsilon_1 = \frac{b_1 r}{\gamma}, \quad A_2 = \frac{1}{k}, \quad \epsilon_2 = \frac{b_2 r}{\beta}, \quad \theta_1 = \frac{\delta_1}{\gamma}, \quad \lambda_1 = \frac{\gamma c_1}{r}, \quad \alpha_1 = \frac{d_1 k}{\beta}, \quad \theta_2 = \frac{\delta_2}{r}, \quad \lambda_2 = \frac{\beta c_2}{r}, \quad \alpha_2 = \frac{d_2 k}{\gamma}$$

Then the system (2.1) reduces the following dimensionless system:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \frac{S}{S+1} - \frac{SP_1}{A_1+S+\epsilon_1 P_1} - \frac{SP_2}{A_2+\epsilon_2 P_2} \\ \frac{dP_1}{dt} &= -\theta_1 P_1 + \lambda_1 \frac{SP_1}{A_1+S+\epsilon_1 P_1} - \alpha_1 P_1 P_2 \\ \frac{dP_2}{dt} &= -\theta_2 P_2 + \lambda_2 \frac{SP_2}{A_2+\epsilon_2 P_2} - \alpha_2 P_1 P_2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Where $S(0) \geq 0, P_1(0) \geq 0, P_2(0) \geq 0$, are the evident that the number of parameters reduced from thirteen in the system (2.1) to ten in the system (2.2).

3. Existence and positive invariance

In this section the local existence and uniqueness of system (2.2) will be demonstrate For $t > 0$ letting $X = (S, P_1, P_2)^T$ and $F = (f_1, f_2, f_3)^T$, such that $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, then system (2.2) can be written as $X' = F$, here $f_i \in C^\infty$, for $i = 1, 2, 3$, where

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{S}{S+1} - \frac{SP_1}{A_1+S+\epsilon_1 P_1} - \frac{SP_2}{A_2+\epsilon_2 P_2} \\ f_2 &= -\theta_1 P_1 + \lambda_1 \frac{SP_1}{A_1+S+\epsilon_1 P_1} - \alpha_1 P_1 P_2 \\ f_3 &= -\theta_2 P_2 + \lambda_2 \frac{SP_2}{A_2+\epsilon_2 P_2} - \alpha_2 P_1 P_2 \end{aligned} \quad (3.1)$$

Clearly, the interaction functions in the system (2.2) are continuous and have continuous partial derivative on the positive three dimensional space $\mathbb{R}_+^3 = \{(S, P_1, P_2): S(0) \geq$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$0, P_1(0) \geq 0, P_2(0) \geq 0$ }. Therefore these functions are Lipschitzian [13] over \mathbb{R}_+^3 and the system (2.3) has a unique solution see [3],[8],[11]

Theorem1. The solution of system (2.3) are uniformly bounded over $X = \{(S, P_1, P_2) \in \mathbb{R}_+^3; w(t) \leq \frac{\rho}{\mu}\}$.

Proof: From the first equation of the system (2.2), we observed that:

$$\frac{dS}{dt} \leq \frac{S}{S+1}$$

then by solving the above differential inequality we obtained that $\limsup_{t \rightarrow \infty} S \leq 1$. Now

assume that $W(t) = S(t) + \frac{P_1(t)}{\lambda_1} + \frac{P_2(t)}{\lambda_2}$, where W is the total population, we get that

$\frac{dW}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{1}{\lambda_1} \frac{dP_1}{dt} + \frac{1}{\lambda_2} \frac{dP_2}{dt}$ which gives $\frac{dW}{dt} \leq \frac{S}{S+1} - \frac{\theta_1}{\lambda_1} P_1 - \frac{\theta_2}{\lambda_2} P_2$, by simplifying the last differential inequality and substituting W , we conclude

$$\frac{dW}{dt} \leq \frac{S}{S+1} - \mu W \quad (3.2)$$

where $\mu = \min \{1, \theta_1, \theta_2\}$, yields $\frac{dW}{dt} + \mu W \leq \frac{S}{S+1}$, finally by solving the differential inequality (3.2) we obtain that $w(t) \leq \max \{w(t_0), \frac{\rho}{\mu}\}$ and $\limsup_{t \rightarrow \infty} w(t) \leq \frac{\rho}{\mu}$, hence all solutions of the system (2.2) are bounded over $\Omega = \{(S, P_1, P_2) \in \mathbb{R}_+^3; S(0) > 0, P_1(0) > 0, P_2(0) > 0\}$.

4. Equilibrium Points and their feasibility

The system (2.2) has five equilibrium points as the following:

The equilibrium points $E_0 = (0,0,0)$, $E_1 = (1,0,0)$ are always feasible.

The first planer equilibrium point is $E_2 = (S_2, P_{12}, 0)$, where S_2 is a unique positive root, see [10] for the quadratic equation

$$\left(1 - \frac{\lambda_1}{\theta_1}\right) S_2^2 + \left(1 + A_1 + \lambda_1 \frac{(\epsilon_1 - 1)}{\theta_1}\right) S_2 + 1 = 0 \quad (4.1)$$

$$\text{while } P_{12} = \frac{\lambda_1}{\theta_1} \left(\frac{S_2}{S_2 + 1}\right) \quad (4.2)$$

The equilibrium point E_2 exists uniquely in the interior of the positive quadrant of $S_2 P_{12}$ -plan provided that the following sufficient condition holds

$$\left(1 + A_1 + \lambda_1 \frac{(\epsilon_1 - 1)}{\theta_1}\right) - \sqrt{2\left(1 - \frac{\lambda_1}{\theta_1}\right)} > 0 \quad (4.3)$$

The second planer equilibrium point is $E_3 = (S_3, 0, P_{23})$ where S_3 is a unique positive root, see [10] for the quadratic equation

$$\frac{\lambda_2}{\theta_2} S_3^2 + \left(\frac{\lambda_2}{\theta_2} - \frac{\epsilon_2 \lambda_2}{\theta_2} - A_2\right) S_3 - A_2 = 0 \quad (4.4)$$

$$\text{while } P_{23} = \frac{\lambda_2}{\theta_2} \left(\frac{S_3}{S_3 + 1}\right) \quad (4.5)$$

The equilibrium point E_3 exists uniquely in the interior of the positive quadrant of $S_3 P_{23}$ -plan provided that the following sufficient condition holds



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$\frac{\lambda_2}{\theta_2} - \frac{\epsilon_2 \lambda_2}{\theta_2} - A_2 - 2 \sqrt{\frac{A_2 \lambda_2}{\theta_2}} > 0. \quad (4.6)$$

The last equilibrium point $E_4 = E^* = (S^*, P_1^*, P_2^*)$ which exists if the component P_2^* is a positive root of the equation

$$M_1 P_2^{*5} + M_2 P_2^{*4} + M_3 P_2^{*3} + M_4 P_2^{*2} + M_5 P_2^* + M_6 = 0 \quad (4.7)$$

$$\text{While } P_1^* = \frac{1}{\alpha_2} \left(\theta_2 - \lambda_2 \frac{S^*}{A_2 + \epsilon_2 P_2^*} \right) \quad (4.8)$$

$$f_3 = -\theta_2 P_2 + \lambda_2 \frac{S P_2}{A_2 + \epsilon_2 P_2} - \alpha_2 P_1 P_2$$

Clearly, the interaction functions in the system (2.2) are continuous and have continuous partial derivative on the positive three dimensional space $\mathbb{R}_+^3 = \{(S, P_1, P_2): S(0) \geq 0, P_1(0) \geq 0, P_2(0) \geq 0\}$. Therefore these functions are Lipschitzian [13] over \mathbb{R}_+^3 and the system (2.3) has a unique solution see [3],[8],[11]

Theorem1. The solution of system (2.3) are uniformly bounded over $X = \{(S, P_1, P_2) \in \mathbb{R}_+^3; w(t) \leq \frac{\rho}{\mu}\}$.

Proof: From the first equation of the system (2.2), we observed that:

$$\frac{dS}{dt} \leq \frac{S}{S+1}$$

then by solving the above differential inequality we obtained that $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup S \leq 1$. Now

assume that $W(t) = S(t) + \frac{P_1(t)}{\lambda_1} + \frac{P_2(t)}{\lambda_2}$, where W is the total population, we get that

$\frac{dW}{dt} = \frac{dS}{dt} + \frac{1}{\lambda_1} \frac{dP_1}{dt} + \frac{1}{\lambda_2} \frac{dP_2}{dt}$ which gives $\frac{dW}{dt} \leq \frac{S}{S+1} - \frac{\theta_1}{\lambda_1} P_1 - \frac{\theta_2}{\lambda_2} P_2$, by simplifying the last differential inequality and substituting W , we conclude

$$\frac{dW}{dt} \leq \frac{S}{S+1} - \mu W \quad (3.2)$$

where $\mu = \min \{1, \theta_1, \theta_2\}$, yields $\frac{dW}{dt} + \mu W \leq \frac{S}{S+1}$, finally by solving the differential inequality (3.2) we obtain that $w(t) \leq \max \{w(t_0), \frac{\rho}{\mu}\}$ and $\lim_{t \rightarrow \infty} \sup w(t) \leq \frac{\rho}{\mu}$, hence all solutions of the system (2.2) are bounded over $\Omega = \{(S, P_1, P_2) \in \mathbb{R}_+^3; S(0) > 0, P_1(0) > 0, P_2(0) > 0\}$.

4. Equilibrium Points and their feasibility

The system (2.2) has five equilibrium points as the following:

The equilibrium points $E_0 = (0,0,0)$, $E_1 = (1,0,0)$ are always feasible.

The first planer equilibrium point is $E_2 = (S_2, P_{12}, 0)$, where S_2 is a unique positive root, see [10] for the quadratic equation

$$\left(1 - \frac{\lambda_1}{\theta_1}\right) S_2^2 + \left(1 + A_1 + \lambda_1 \frac{(\epsilon_1 - 1)}{\theta_1}\right) S_2 + 1 = 0 \quad (4.1)$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

while
$$P_{12} = \frac{\lambda_1}{\theta_1} \left(\frac{S_2}{S_2+1} \right) \quad (4.2)$$

The equilibrium point E_2 exists uniquely in the interior of the positive quadrant of S_2P_{12} -plan provided that the following sufficient condition holds

$$\left(1 + A_1 + \lambda_1 \frac{(\epsilon_1-1)}{\theta_1} \right) - \sqrt{2(1 - \frac{\lambda_1}{\theta_1})} > 0 \quad (4.3)$$

The second planer equilibrium point is $E_3 = (S_3, 0, P_{23})$ where S_3 is a unique positive root, see [10] for the quadratic equation

$$\frac{\lambda_2}{\theta_2} S_3^2 + \left(\frac{\lambda_2}{\theta_2} - \frac{\epsilon_2 \lambda_2}{\theta_2} - A_2 \right) S_3 - A_2 = 0 \quad (4.4)$$

while
$$P_{23} = \frac{\lambda_2}{\theta_2} \left(\frac{S_3}{S_3+1} \right) \quad (4.5)$$

The equilibrium point E_3 exists uniquely in the interior of the positive quadrant of S_3P_{23} -plan provided that the following sufficient condition holds

$$\frac{\lambda_2}{\theta_2} - \frac{\epsilon_2 \lambda_2}{\theta_2} - A_2 - 2 \sqrt{\frac{A_2 \lambda_2}{\theta_2}} > 0. \quad (4.6)$$

The last equilibrium point $E_4 = E^* = (S^*, P_1^*, P_2^*)$ which exists if the component P_2^* is a positive root of the equation

$$M_1 P_2^{*5} + M_2 P_2^{*4} + M_3 P_2^{*3} + M_4 P_2^{*2} + M_5 P_2^* + M_6 = 0 \quad (4.7)$$

While
$$P_1^* = \frac{1}{\alpha_2} \left(\theta_2 - \lambda_2 \frac{S^*}{A_2 + \epsilon_2 P_2^*} \right) \quad (4.8)$$

and
$$S^* = \frac{(\theta_1 \alpha_2 \epsilon_2 A_1 - \alpha_1 \alpha_2 A_1 A_2) P_2^* - \alpha_2 \alpha_1 A_1 \epsilon_2 P_2^{*2} + \theta_1 \alpha_2 A_1 A_2}{\alpha_1 \alpha_2 A_2 P_2^* + \alpha_1 \alpha_2 \epsilon_2 P_2^{*2} - (\theta_1 + \lambda_1) \alpha_2 A_2 - (\theta_1 + \lambda_1) \alpha_2 \epsilon_2 P_2^*} \quad (4.9)$$

According to Descartes's rule, see [4] of sign equation (4.7) has three positive real roots in \mathbb{R}_+^3 under the following conditions :

$M_1 > 0, M_2 < 0, M_3 > 0, M_4 > 0, M_5 > 0, M_6 < 0$
and E^* exist.

Where

$$M_1 = F_5 K_4^2 + F_3 K_1^2 - F_1 K_1 K_4$$

$$M_2 = (K_1(K_2 K_4 - K_1 K_5) + F_2 K_1 K_4 - 2F_3 K_1 K_2 - F_4 K_1^2 + 2K_4 K_5 F_5 - F_6 K_4^2)$$

$$M_3 = (F_1(K_2 K_5 - K_1 K_6 + K_3 K_4) + F_2(K_1 K_4 - K_1 K_5) + F_3(K_2^2 - 2K_1 K_3) + 2F_4 K_1 K_2 + F_5(K_5^2 + 2K_4 K_6) - 2F_6 K_4 K_5),$$

$$M_4 = (F_1(K_2 K_6 + K_3 K_5) + F_2(K_2 K_5 - K_1 K_6 + K_3 K_4) + 2K_2 K_3 F_3 - F_4(K_2^2 - 2K_1 K_3) + 2K_5 K_6 F_5 - 2F_6(K_5^2 + 2K_4 K_6))$$

$$M_5 = (K_3 K_6 F_1 + F_2(K_2 K_6 + K_3 K_5) + F_3 K_3^2 - 2K_2 K_3 F_4 + K_6^2 F_5 - 2F_6 K_5 K_6)$$

$$M_6 = F_2 K_3 K_2 - K_3^2 F_4 - K_6^2 F_6$$

$$K_1 = \alpha_1 \alpha_2 A_1 \epsilon_2, \quad K_2 = \theta_1 \alpha_2 \epsilon_2 A_1 - \alpha_1 \alpha_2 A_1 A_2 - \theta_2 \epsilon_2, \quad K_3 = \theta_1 \alpha_2 A_1 A_2 - \theta_2 A_2, \quad K_4 = \alpha_1 \alpha_2 \epsilon_2, \quad K_5 = \alpha_1 \alpha_2 A_2 - (\theta_1 + \lambda_1) \alpha_2 \epsilon_2, \quad K_6 = (\theta_1 + \lambda_1) \alpha_2 A_2 +$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$\lambda_2, F_1 = \frac{-\theta_2 \alpha_1}{\alpha_2 \lambda_1} + \frac{\alpha_1 \lambda_2}{\lambda_1 \alpha_2} + \frac{\theta_2}{\lambda_2}, F_2 = 1 + \frac{\theta_1 \theta_2}{\lambda_1 \alpha_2} + \frac{\theta_1 \lambda_2}{\lambda_1 \alpha_2} - \frac{\theta_2}{\lambda_2}, F_3 = 1 - \frac{\alpha_1 \lambda_2}{\lambda_1 \alpha_2}, F_4 = \frac{\theta_1 \lambda_2}{\lambda_1 \alpha_2}, F_5 = 1 + \frac{\theta_2 \alpha_1}{\alpha_2 \lambda_1} - 2 \frac{\theta_2}{\lambda_2}, F_6 = -\frac{\theta_1 \theta_2}{\lambda_1 \alpha_2}$$

5. Local Stability of Equilibrium points

In this section, we analyze local stability for each equilibrium point of the system (2.2). The Jacobian matrix of the system (2.2) at any point (S, P_1, P_2) is defined as:

$$J = D_f(X) = [C_{ij}]_{3 \times 3} \quad (5.1)$$

which is given as follows:

$$c_{11} = \frac{1}{(S+1)^2} - \frac{(A_1 + \epsilon_1 P_1) P_1}{(A_1 + S + \epsilon_1 P_1)^2} - \frac{P_2}{A_2 + \epsilon_2 P_2}, c_{12} = \frac{-S(A_1 + S)}{(A_1 + S + \epsilon_1 P_1)^2}, c_{13} = \frac{-A_2 S}{(A_2 + \epsilon_2 P_2)^2}, c_{21} = \lambda_1 \frac{P_1(A_1 + \epsilon_1 P_1)}{(A_1 + S + \epsilon_1 P_1)^2}$$

$$c_{22} = -\theta_1 + \lambda_1 \frac{S(A_1 + S)}{(A_1 + S + \epsilon_1 P_1)^2} - \alpha_1 P_2, c_{23} = -\alpha_1 P_1, c_{31} = -\lambda_2 \frac{P_2}{(A_2 + \epsilon_2 P_2)}, c_{32} = -\alpha_2 P_2$$

$$, c_{33} = -\theta_2 + \lambda_2 \frac{S A_2}{(A_2 + \epsilon_2 P_2)^2} - \alpha_2 P_1$$

Local stability of E_0 : the eigenvalues of the jacobian matrix J_0 are $1, -\theta_1$ and $-\theta_2$. Therefore E_0 is unstable actually it is a saddle point.

$$J_0 = D_f(E_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\theta_2 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Local stability of E_1 : the eigenvalues of the Jacobian matrix J_1 are $\frac{1}{4}, -\theta_1 + \lambda_1 \frac{1}{(A_1+1)}$ and $-\theta_2 + \lambda_2 \frac{1}{A_2}$. Therefore E_1 is unstable clearly it is a saddle point

$$J_1 = D_f(E_1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\left[\frac{1}{(A_1+1)}\right] & -\frac{1}{A_2} \\ 0 & -\theta_1 + \lambda_1 \frac{1}{(A_1+1)} & 0 \\ 0 & 0 & -\theta_2 + \lambda_2 \frac{1}{A_2} \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Local stability of E_2 : The characteristic equation of the Jacobian matrix $J_2 = D_f(X) = [a_{ij}]_{3 \times 3}$, where

$$\lambda^3 + \Omega_1 \lambda^2 + \Omega_2 \lambda + \Omega_3 = 0, \text{ where } \Omega_1 = -[a_{11} + a_{22} + a_{33}], \Omega_2 = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12} + a_{11} a_{33} + a_{22} a_{33} \text{ and } \Omega_3 = -a_{33}(a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}), \text{ the } [a_{ij}]_{3 \times 3} \text{ elements are}$$

$$a_{11} = \frac{1}{(S_2+1)^2} - \frac{P_{12}(A_1 + \epsilon_1 P_{12})}{(A_1 + S_2 + \epsilon_1 P_{12})^2}, a_{12} = \frac{S_2(A_1 + S_2)}{(A_1 + S_2 + \epsilon_1 P_{12})^2} \text{ and } S^* = \frac{(\theta_1 \alpha_2 \epsilon_2 A_1 - \alpha_1 \alpha_2 A_1 A_2) P_2^* - \alpha_2 \alpha_1 A_1 \epsilon_2 P_2^{*2} + \theta_1 \alpha_2 A_1 A_2}{\alpha_1 \alpha_2 A_2 P_2^* + \alpha_1 \alpha_2 \epsilon_2 P_2^{*2} - (\theta_1 + \lambda_1) \alpha_2 A_2 - (\theta_1 + \lambda_1) \alpha_2 \epsilon_2 P_2^*} \quad (4.9)$$

According to Descartes's rule, see [4] of sign equation (4.7) has three positive real roots in \mathbb{R}_+^3 under the following conditions :



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$M_1 > 0, M_2 < 0, M_3 > 0, M_4 > 0, M_5 > 0, M_6 < 0$
and E^* exist.

Where

$$M_1 = F_5 K_4^2 + F_3 K_1^2 - F_1 K_1 K_4$$

$$M_2 = (K_1(K_2 K_4 - K_1 K_5) + F_2 K_1 K_4 - 2F_3 K_1 K_2 - F_4 K_1^2 + 2K_4 K_5 F_5 - F_6 K_4^2)$$

$$M_3 = (F_1(K_2 K_5 - K_1 K_6 + K_3 K_4) + F_2(K_1 K_4 - K_1 K_5) + F_3(K_2^2 - 2K_1 K_3) + 2F_4 K_1 K_2 + F_5(K_5^2 + 2K_4 K_6) - 2F_6 K_4 K_5),$$

$$M_4 = (F_1(K_2 K_5 + K_3 K_4) + F_2(K_2 K_5 - K_1 K_6 + K_3 K_4) + 2K_2 K_3 F_3 - F_4(K_2^2 - 2K_1 K_3) + 2K_5 K_6 F_5 - 2F_6(K_5^2 + 2K_4 K_6))$$

$$M_5 = (K_3 K_6 F_1 + F_2(K_2 K_6 + K_3 K_5) + F_3 K_3^2 - 2K_2 K_3 F_4 + K_6^2 F_5 - 2F_6 K_5 K_6)$$

$$M_6 = F_2 K_3 K_2 - K_3^2 F_4 - K_6^2 F_6$$

$$K_1 = \alpha_1 \alpha_2 A_1 \epsilon_2, K_2 = \theta_1 \alpha_2 \epsilon_2 A_1 - \alpha_1 \alpha_2 A_1 A_2 - \theta_2 \epsilon_2, K_3 = \theta_1 \alpha_2 A_1 A_2 - \theta_2 A_2,$$

$$K_4 = \alpha_1 \alpha_2 \epsilon_2, K_5 = \alpha_1 \alpha_2 A_2 - (\theta_1 + \lambda_1) \alpha_2 \epsilon_2, K_6 = (\theta_1 + \lambda_1) \alpha_2 A_2 +$$

$$\lambda_2, F_1 = \frac{-\theta_2 \alpha_1}{\alpha_2 \lambda_1} + \frac{\alpha_1 \lambda_2}{\lambda_1 \alpha_2} + \frac{\theta_2}{\lambda_2}, F_2 = 1 + \frac{\theta_1 \theta_2}{\lambda_1 \alpha_2} + \frac{\theta_1 \lambda_2}{\lambda_1 \alpha_2} - \frac{\theta_2}{\lambda_2}, F_3 = 1 - \frac{\alpha_1 \lambda_2}{\lambda_1 \alpha_2}, F_4 =$$

$$\frac{\theta_1 \lambda_2}{\lambda_1 \alpha_2}, F_5 = 1 + \frac{\theta_2 \alpha_1}{\alpha_2 \lambda_1} - 2 \frac{\theta_2}{\lambda_2}, F_6 = -\frac{\theta_1 \theta_2}{\lambda_1 \alpha_2}$$

5. Local Stability of Equilibrium points

In this section, we analyze local stability for each equilibrium point of the system (2.2)

The Jacobian matrix of the system (2.2) at any point (S, P_1, P_2) is defined as:

$$J = D_f(X) = [C_{ij}]_{3 \times 3} \quad (5.1)$$

which is given as follows:

$$c_{11} = \frac{1}{(S+1)^2} - \frac{(A_1 + \epsilon_1 P_1) P_1}{(A_1 + S + \epsilon_1 P_1)^2} - \frac{P_2}{A_2 + \epsilon_2 P_2}, c_{12} = \frac{-S(A_1 + S)}{(A_1 + S + \epsilon_1 P_1)^2}, c_{13} = \frac{-A_2 S}{(A_2 + \epsilon_2 P_2)^2}, c_{21} =$$

$$\lambda_1 \frac{P_1(A_1 + \epsilon_1 P_1)}{(A_1 + S + \epsilon_1 P_1)^2}$$

$$c_{22} = -\theta_1 + \lambda_1 \frac{S(A_1 + S)}{(A_1 + S + \epsilon_1 P_1)^2} - \alpha_1 P_2, c_{23} = -\alpha_1 P_1, c_{31} = -\lambda_2 \frac{P_2}{(A_2 + \epsilon_2 P_2)}, c_{32} = -\alpha_2 P_2$$

$$, c_{33} = -\theta_2 + \lambda_2 \frac{S A_2}{(A_2 + \epsilon_2 P_2)^2} - \alpha_2 P_1$$

Local stability of E_0 : the eigenvalues of the jacobian matrix J_0 are $1, -\theta_1$ and $-\theta_2$. Therefore E_0 is *unstable* actually it is a saddle point.

$$J_0 = D_f(E_0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\theta_2 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Local stability of E_1 : the eigenvalues of the Jacobian matrix J_1 are $\frac{1}{4}, -\theta_1 + \lambda_1 \frac{1}{(A_1 + 1)}$ and $-\theta_2 + \lambda_2 \frac{1}{A_2}$. Therefore E_1 is *unstable* clearly it is a saddle point



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$J_1 = D_f(E_1) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & -\left[\frac{1}{(A_1+1)}\right] & -\frac{1}{A_2} & 1 \\ 0 & -\theta_1 + \lambda_1 \frac{1}{(A_1+1)} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\theta_2 + \lambda_2 \frac{1}{A_2} & 1 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Local stability of E_2 : The characteristic equation of the Jacobian matrix $J_2 = D_f(X) = [a_{ij}]_{3 \times 3}$, where $\lambda^3 + \Omega_1 \lambda^2 + \Omega_2 \lambda + \Omega_3 = 0$, where $\Omega_1 = -[a_{11} + a_{22} + a_{33}]$, $\Omega_2 = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} + a_{11}a_{33} + a_{22}a_{33}$ and $\Omega_3 = -a_{33}(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})$, the $[a_{ij}]_{3 \times 3}$ elements are $a_{11} = \frac{1}{(S_2+1)^2} - \frac{P_{12}(A_1+\epsilon_1 P_{12})}{(A_1+S_2+\epsilon_1 P_{12})^2}$, $a_{12} = \frac{S_2(A_1+S_2)}{(A_1+S_2+\epsilon_1 P_{12})^2}$, $a_{13} = -\frac{S_2}{A_2}$, $a_{21} = \lambda_1 \frac{P_{12}(A_1+\epsilon_1 P_{12})}{(A_1+S_2+\epsilon_1 P_{12})^2}$, $a_{22} = -\theta_1 + \lambda_1 \frac{S_2(A_1+S_2)}{(A_1+S_2+\epsilon_1 P_{12})^2}$, $a_{23} = -\alpha_1 P_{12}$, $a_{31} = 0$, $a_{32} = 0$, $a_{33} = -\theta_2 + \lambda_2 \frac{S_2}{A_2} - \alpha_2 P_{12}$, hence by Routh-Hurwitz criterion [14] E_2 is locally asymptotically stable if $\Omega_1 > 0, \Omega_3 > 0$ and $\Delta > 0$ where $\Delta = \Omega_1 \Omega_2 - \Omega_3 = -a_{11}^2(a_{22} + a_{33}) - a_{22}^2(a_{11} + a_{33}) - a_{33}^2(a_{11} + a_{22}) - 2a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{12}(a_{11} + a_{22})$, so that E_2 is locally asymptotically stable point if $a_{11} < 0, a_{22} < 0, a_{33} < 0$, that is:

$$\frac{1}{(S_2+1)^2} < \frac{P_{12}(A_1+\epsilon_1 P_{12})}{(A_1+S_2+\epsilon_1 P_{12})^2} \quad (5.4)$$

$$\theta_1 < \frac{S_2(A_1+S_2)}{(A_1+S_2+\epsilon_1 P_{12})^2} \quad (5.5)$$

$$\theta_2 < \lambda_2 \frac{S_2}{A_2} - \alpha_2 P_{12} \quad (5.6)$$

Local stability of E_3 : The characteristic equation of the jacobian matrix $J_3 = D_f(X) = [b_{ij}]_{3 \times 3}$ is $\lambda^3 + \Psi_1 \lambda^2 + \Psi_2 \lambda + \Psi_3 = 0$, where $\Psi_1 = -[b_{11} + b_{22} + b_{33}]$, $\Psi_2 = b_{11}b_{22} - b_{31}b_{13} + b_{11}b_{33} + b_{22}b_{33}$ and $\Psi_3 = -b_{22}(b_{11}b_{33} - b_{31}b_{13})$, the $[b_{ij}]_{3 \times 3}$ elements are $b_{11} = \frac{1}{(S_3+1)^2} - \frac{P_{23}}{A_2+\epsilon_2 P_{23}}$, $b_{12} = \frac{-S_3}{(A_1+S_3)}$, $b_{13} = \frac{-S_3 A_2}{(A_2+\epsilon_2 P_{23})^2}$, $b_{21} = 0$, $b_{22} = -\theta_1 + \lambda_1 \frac{S_3}{(A_1+S_3)} - \alpha_1 P_{23}$, $b_{23} = 0$, $b_{31} = \lambda_2 \frac{P_{23}}{A_2+\epsilon_2 P_{23}}$, $b_{32} = -\alpha_2 P_{32}$, $b_{33} = -\theta_2 + \lambda_2 \frac{S_3 A_2}{(A_2+\epsilon_2 P_{23})^2}$, so by Routh-Hurwitz criterion E_3 is locally asymptotically stable if $\Psi_1 > 0, \Psi_3 > 0$ and $\Delta > 0$ where $\Delta = \Psi_1 \Psi_2 - \Psi_3 = -b_{11}^2(b_{22} + b_{33}) - b_{22}^2(b_{11} + b_{33}) - b_{33}^2(b_{11} + b_{22}) - 2b_{11}b_{22}b_{33} + b_{31}b_{13}(b_{11} + b_{33})$, thus E_2 is locally asymptotically stable if $b_{11} < 0, b_{22} < 0, b_{33} < 0$, that is

$$\frac{1}{(S_3+1)^2} < \frac{P_{23}}{A_2+\epsilon_2 P_{23}} \quad (5.7)$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$\theta_1 < \lambda_1 \frac{S_3}{(A_1+S_3)} - \alpha_1 P_{23} \quad (5.8)$$

$$\theta_2 < \lambda_2 \frac{S_3 A_2}{(A_2+\epsilon_2 P_{23})^2} \quad (5.9)$$

Local stability of E^* . Let $J^* = J = D_f(X) = D_f(E^*) = [C_{ij}]_{3 \times 3}$ as shown in (5.1) (After substituting S with S^* , P_1 with P_1^* and P_2 with P_2^*)

Theorem 2. The system (2.2) is locally asymptotically stable around the equilibrium point

$E^*=(S^*, P_1^*, P_2^*) = (S, P_1, P_2)$, if the following conditions are satisfied :

$$\frac{1}{(S+1)^2} < \frac{(A_1+\epsilon_1 P_1)}{(A_1+S+\epsilon_1 P_1)^2} + \frac{P_2}{A_2+\epsilon_2 P_2} \quad (5.10)$$

$$\theta_1 < \lambda_1 \frac{S(A_1+S)}{(A_1+S+\epsilon_1 P_1)^2} - \alpha_1 P_2 \quad (5.11)$$

$$\theta_2 < \lambda_2 \frac{S A_2}{(A_2+\epsilon_2 P_2)^2} - \alpha_2 P_1 \quad (5.12)$$

Proof: Let us define the characteristic equation of the Jacobian matrix $J^* = D_f(E^*) = (c_{ij})_{3 \times 3} = Df(X)$ as $\lambda^3 + \Theta_1 \lambda^2 + \Theta_2 \lambda + \Theta_3 = 0$, where $\Theta_1 = -[c_{11} + c_{22} + c_{33}]$, $\Theta_2 = c_{11}c_{22} - c_{21}c_{12} - c_{31}c_{13} + c_{11}c_{33} + c_{22}c_{33} - c_{32}c_{23}$ and $\Theta_3 = -c_{33}(c_{11}c_{22} - c_{21}c_{12}) - c_{12}c_{23}c_{31} - c_{13}c_{21}c_{32} + c_{13}c_{22}c_{31} + c_{11}c_{23}c_{32}$, so by (Routh-Hurwitz) criterion E^* is locally asymptotically stable if $\Theta_1 > 0, \Theta_3 > 0$ and $\Delta > 0$ where $\Delta = \Theta_1 \Theta_2 - \Theta_3 = -(c_{11} + c_{22} + c_{33})[c_{11}c_{22} - c_{21}c_{12} + c_{11}c_{33} + c_{22}c_{33} - c_{31}c_{13} - c_{32}c_{23}] + c_{33}(c_{11}c_{22} - c_{21}c_{12}) + c_{12}c_{23}c_{31} + c_{13}c_{21}c_{32} - c_{13}c_{22}c_{31} - c_{11}c_{23}c_{32}$.

So E^* is locally asymptotically stable if $c_{11} < 0, c_{22} < 0, c_{33} < 0$, that is: (5.10), (5.11) and (5.12) holds. Therefore, the prove is complete.

6. Global Stability

In this subsection, the global stability is studied for each locally stable equilibrium point using a suitable Lyapunov function [15] that is given in the following theorems:

Theorem 3. Assume that the equilibrium point $E_2 = (S_2, P_{12}, 0)$ is locally asymptotically stable in \mathbb{R}^3 . Then it is globally asymptotically stable that satisfy the following conditions are satisfied:

$$\frac{(P_1 - P_{12})}{A_1 + S + \epsilon_1 P_1} + \frac{P_2}{A_2 + \epsilon_2 P_2} > \frac{1}{(S - S_2) + 1} \quad (6.1)$$

$$\theta_1 + \alpha_1 P_2 > \frac{\lambda_1 (S - S_2)}{A_1 + (S - S_2) + \epsilon_1 (P_1 - P_{12})} \quad (6.2)$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$\theta_2 + \alpha_2(P_1 - P_{12}) > \frac{\lambda_2(S-S_2)}{A_2+\epsilon_2P_2} \quad (6.3)$$

Proof. Applying suitable Lyapunov function at $E_2 = (S_2, P_{12}, 0)$ we get:

$$W_2 = \frac{(S-S_2)^2}{2} + \frac{(P_1-P_{12})^2}{2} + P_2 \quad (6.4)$$

Clearly $W_2(S, P_1, P_2) > 0$ is a continuously differentiable real valued function for all $(S, P_1, P_2) \in \mathbb{R}^3$ with $(S, P_1, P_2) \neq (S_2, P_{12}, 0)$ and $W_2(S_2, P_{12}, 0) = 0$, moreover we have that $\frac{dW_2}{dt} = (S - S_2) \frac{dS}{dt} + (P_1 - P_{12}) \frac{dP_1}{dt} + \frac{dP_2}{dt}$ we get by Substituting $\frac{dS}{dt}$, $\frac{dP_1}{dt}$ and $\frac{dP_2}{dt}$ from (2.2) we get $\frac{dW_2}{dt} = (S - S_2) \left[\frac{(S-S_2)}{(S-S_2)+1} - \frac{(S-S_2)(P_1-P_{12})}{A_1+(S-S_2)+\epsilon_1(P_1-P_{12})} - \frac{(S-S_2)P_2}{A_2+\epsilon_2P_2} \right] + (P_1 - P_{12}) \left[-\theta_1(P_1 - P_{12}) + \lambda_1 \frac{(S-S_2)(P_1-P_{12})}{A_1+(S-S_2)+\epsilon_1(P_1-P_{12})} - \alpha_2P_2(P_1 - P_{12}) \right] - \theta_2P_2 + \lambda_2 \frac{(S-S_2)P_2}{A_2+\epsilon_2P_2} - \alpha_1(P_1 - P_{12})P_2$

Now straightforward computations give

$$\frac{dW_2}{dt} \leq -\tau_1(S - S_2)^2 - \tau_2(P_1 - P_{12}) - \tau_3P_2$$

Where

$$\tau_1 = \frac{(P_1-P_{12})}{A_1+S+\epsilon_1P_1} + \frac{P_2}{A_2+\epsilon_2P_2} - \frac{1}{(S-S_2)+1}$$

$$\tau_2 = \theta_1 + \alpha_1P_2 - \frac{\lambda_1(S-S_2)}{A_1+(S-S_2)+\epsilon_1(P_1-P_{12})}$$

$$\tau_3 = \theta_2 + \alpha_2(P_1 - P_{12}) > \frac{\lambda_2(S-S_2)}{A_2+\epsilon_2P_2}$$

So according to conditions (6.1), (6.2) and (6.3) we guarantee $\frac{dW_2}{dt} < 0$

Hence E_2 is globally asymptotically stable

As the same we could proof that $E_3 = (S_3, 0, P_{23})$ is globally asymptotically stable.

Theorem 4. Assume that the equilibrium $E^* = (S^*, P_1^*, P_2^*)$ point is locally asymptotically stable in \mathbb{R}^3 .

Then it is globally asymptotically stable if the following conditions are satisfied:

$$\frac{(P_1-P_1^*)}{A_1+(S-S^*)+\epsilon_1(P_1-P_1^*)} + \frac{(P_2-P_2^*)}{A_2+\epsilon_2(P_2-P_2^*)} > \frac{1}{(S-S^*)+1} \quad (6.5)$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$\theta_1 + \alpha_1(P_2 - P_2^*) > \lambda_1 \frac{(S-S^*)}{A_1+(S-S^*)+\epsilon_1(P_1-P_1^*)} \quad (6.6)$$

$$\theta_2 + \alpha_2(P_1 - P_1^*) > \lambda_2 \frac{(S-S^*)}{A_2+\epsilon_2(P_2-P_2^*)} \quad (6.7)$$

Proof. Consider the following chosen Lyapunov function:

$$W^* = \frac{(S-S^*)^2}{2} + \frac{(P_1-P_1^*)^2}{2} + \frac{(P_2-P_2^*)^2}{2} \quad (6.8)$$

where W^* is a function of (S^*, P_1^*, P_2^*) and $W^* > 0$, Now by differentiating W^* with respect to time t , gives that :

$$\begin{aligned} \frac{dW^*}{dt} &= (S - S^*) \frac{dS}{dt} + (P_1 - P_1^*) \frac{dP_1}{dt} + (P_2 - P_2^*) \frac{dP_2}{dt} \\ \frac{dW^*}{dt} &= (S - S^*) \left[\frac{(S-S^*)}{(S-S^*)+1} - \frac{(S-S^*)(P_1-P_1^*)}{A_1+(S-S^*)+\epsilon_1(P_1-P_1^*)} - \frac{(S-S^*)(P_2-P_2^*)}{A_2+\epsilon_2(P_2-P_2^*)} \right] + (P_1 - P_1^*) \left[-\theta_1(P_1 - P_1^*) + \lambda_1 \frac{(S-S^*)(P_1-P_1^*)}{A_1+(S-S^*)+\epsilon_1(P_1-P_1^*)} - \alpha_1(P_1 - P_1^*)(P_2 - P_2^*) \right] + (P_2 - P_2^*) \left[-\theta_2(P_2 - P_2^*) + \lambda_2 \frac{(S-S^*)(P_2-P_2^*)}{A_2+\epsilon_2(P_2-P_2^*)} - \alpha_2(P_1 - P_1^*)(P_2 - P_2^*) \right] \end{aligned}$$

After using the method of completing square and taking common factors of resulting algebraic terms and simplifying them, we get

$$\frac{dW^*}{dt} \leq -(S - S^*)^2 \xi_1 - (P_1 - P_1^*)^2 \xi_2 - (P_2 - P_2^*)^2 \xi_3$$

Where

$$\xi_1 = \frac{(P_1-P_1^*)}{A_1+(S-S^*)+\epsilon_1(P_1-P_1^*)} + \frac{(P_2-P_2^*)}{A_2+\epsilon_2(P_2-P_2^*)} - \frac{1}{(S-S^*)+1}$$

$$\xi_2 = \theta_1 + \alpha_1(P_2 - P_2^*) - \lambda_1 \frac{(S-S^*)}{A_1+(S-S^*)+\epsilon_1(P_1-P_1^*)}$$

$$\xi_3 = \theta_2 + \alpha_2(P_1 - P_1^*) - \lambda_2 \frac{(S-S^*)}{A_2+\epsilon_2(P_2-P_2^*)}$$

So according to conditions (6.5), (6.6) and (6.7) we guarantee $\frac{dW^*}{dt} < 0$

Therefore E^* is globally asymptotically stable.

7. Bifurcation Analyses

The occurrence of local bifurcation is well known that non-hyperbolic equilibrium point property is a necessary but not sufficient condition for the occurrence of bifurcation around that point. In the following theorems, the candidate bifurcation parameter is



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

selected so that the equilibrium point under study will be a non-hyperbolic point ,we study in this section the local bifurcation for the equilibrium point by applying the Sotomayor's theorem [16] ,while E^* is selected to analyze the Hopf -bifurcation[17] occurrence around certain parameter λ_2 .

Theorem 5. The system (2.2) has a transcritical bifurcations and pitchfork bifurcation but not saddle node bifurcation can occur near the equilibrium point E_2 passes through the parameter $\theta_2^* = \lambda_2 \frac{S_2}{A_2} - \alpha_2 P_{12}$.

Proof. It is easy to verify that the Jacobain matrix of system (2.2) at (E_2, θ_2^*) can be written as

$$J_2^{\theta_2^*} = \begin{bmatrix} Y_1 & -Y_3 & -\frac{S_2}{A_2} \\ Y_2 & Y_4 & -\alpha_1 P_{12} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ where } Y_1 = \frac{1}{(S_2+1)^2} - \frac{P_{12}(A_1+\epsilon_1 P_{12})}{(A_1+S_2+\epsilon_1 P_{12})^2}, Y_2 = \lambda_1 \frac{P_{12}(A_1+\epsilon_1 P_{12})}{(A_1+S_2+\epsilon_1 P_{12})^2},$$

$$Y_3 = \frac{S_2(A_1 + S_2)}{(A_1 + S_2 + \epsilon_1 P_{12})^2}, Y_4 = -\theta_1 + \lambda_1 \frac{S_2(A_1 + S_2)}{(A_1 + S_2 + \epsilon_1 P_{12})^2}$$

Clearly, the third eigenvalue ζ_{3P_2} in the P_2 direction is zero while the first eigenvalue $\zeta_1 = \frac{1}{(S_2+1)^2} - \frac{P_{12}(A_1+\epsilon_1 P_{12})}{(A_1+S_2+\epsilon_1 P_{12})^2} < 0$ and the second eigenvalue $\zeta_2 = -\theta_1 + \lambda_1 \frac{S_2(A_1+S_2)}{(A_1+S_2+\epsilon_1 P_{12})^2} < 0$ when conditions (5.4),(5.5) are satisfied respectively, further the eigenvector $v = (v_1, v_2, v_3)^T$ corresponding to ζ_{3P_2} satisfies the following $J_2^{\theta_2^*} v = \zeta v$ then $J_2^{\theta_2^*} v = 0$ we get

$$Y_1 v_1 - Y_3 v_2 - \frac{S_2}{A_2} v_3 = 0 \quad (7.1)$$

$$Y_2 v_1 + Y_4 v_2 - \alpha_1 P_{12} v_3 = 0 \quad (7.2)$$

so by solving the above system of equations we get $v_1 = O_1 v_3$ and $v_2 = O_2 v_3$, where v_3 is a nonzero value number and $O_1 = \frac{Y_4 \frac{S_2}{A_2} + \alpha_1 P_{12} Y_3}{Y_4 Y_1 + Y_3 Y_2}$, $O_2 = \frac{Y_1 O_1 - \frac{S_2}{A_2}}{Y_3}$, thus :

$v = \begin{bmatrix} O_1 v_3 \\ O_2 v_3 \\ v_3 \end{bmatrix}$, similarly we take the eigenvector $\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ corresponding to the eigenvalue ζ_{3P_2} of $[J_2^{\theta_2^*}]^T$ can be written as



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$$\begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & 0 \\ -Y_3 & Y_4 & 0 \\ -\frac{S_2}{A_2} & -\alpha_1 P_{12} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = 0, \text{ we get } \omega = (0, 0, \omega_3)^T \quad (7.3)$$

Here ω_3 is any nonzero real number.

Now rewrite the system in vector form as $\frac{dx}{dt} = f(X)$ where $X = (S, P_1, P_2)^T$, $f = (f_1, f_2, f_3)^T$

And $\frac{\partial f}{\partial \theta_2} = f_{\theta_2}$, we get that $f_{\theta_2} = [0, 0, -P_2]^T$ obviously $f_{\theta_2}(E_1, \theta_2^*) = [0, 0, 0]^T$.

Therefore $\omega^T f_{\theta_2}(E_2, \theta_2^*) = 0 \quad (7.4)$

Consequently, according to the Sotomayor theorem the system has no saddle-node bifurcation near E_1 through θ_2^* , now in order to investigate the occurrence of the other types of bifurcation, the derivative of $f_{\theta_2}^*$ with respect to vector X say $Df_{\theta_2}^*(E_1, \theta_2^*)$ is computed

$$Df_{\theta_2}^*(E_1, \theta_2^*) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ And } \omega^T Df_{\theta_2}^*(E_1, \theta_2^*) v' = -v_3 w_3 \neq 0$$

Again, according to Sotomayor theorem if in addition to the above, the following holds

$$\omega^T [D^2 f_{\theta_2}^*(E_1, \theta_2^*)(v', v')] \neq 0 \quad (7.5)$$

And $\omega^T [D^3 f_{\theta_2}^*(E_1, \theta_2^*)(v', v', v')] \neq 0 \quad (7.6)$

Then the system (2.2) has a transcritical bifurcation and pitchfork bifurcation at E_2 .

8. Hopf-bifurcation.

Theorem 10. The equilibrium point E^* of the system(2.2) has no Hopf-bifurcation around the parameter λ_1 .

Proof. According to the local stability analysis of system (2.2) at E^* , we have that the coefficients of the characteristic equation $\Theta_i; i = 1, 2, 3$ are positive provided that

$$\Lambda^3 + \Theta_1 \Lambda^2 + \Theta_2 \Lambda + \Theta_3 = 0 \quad (8.1)$$

However, $\Delta = \Theta_1 \Theta_2 - \Theta_3$ is positive provided that $c_{22} < 0$ in J^*

That is $-\theta_1 + \lambda_1 \frac{S(A_1+S)}{(A_1+S+\epsilon_1 P_1)^2} - \alpha_1 P_2 < 0$ and hence there is no Hopf- bifurcation in this case.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

Now suppose that $\Delta = \theta_1\theta_2 - \theta_3 = 0$ then according to [17] there is possibility to occurrence of Hopf -bifurcation if and only if the Jacobian matrix of system (2.2) near E^* has two complex conjugate eigenvalues , say $\kappa_i = \rho_1 \pm i\rho_2$ with the third eigenvalue is real and negative , in addition, the following two conditions are held in specific parameter say $l = l^*$ and

$$\rho_1(l^*) = 0 \quad (8.2)$$

$$\frac{d\rho_1}{dl} \Big|_{l=l^*} \neq 0 \quad (8.3)$$

Now from $\Delta = \theta_1\theta_2 - \theta_3 = 0$ we obtain that

$$Mc_{22}^2 + Bc_{22} + C = 0 \quad (8.4)$$

Where

$$M = -(c_{11} + c_{33}) \text{ is } > 0 ,$$

$$B = -(c_{11} + c_{33})^2 + c_{21}c_{12} + c_{32}c_{23} ,$$

$$C = (c_{11} + c_{33})(c_{13}c_{31} + c_{11}c_{33}(c_{11} + c_{33}) + c_{11}c_{12}c_{21} + c_{33}c_{32}c_{23} + c_{13}c_{21}c_{32} + c_{12}c_{23}c_{31})$$

Clearly for $C < 0$ we have two real roots of the equation (8.4) say

$$c_{22} = \frac{-B}{2M} \pm \frac{\sqrt{B^2 - 4MC}}{2M} , \text{ since } c_{22} < 0, \text{ then we get } c_{22} = \frac{-B}{2M} - \frac{\sqrt{B^2 - 4MC}}{2M} \text{ and hence}$$

$$-\theta_1 + \lambda_1 \frac{S(A_1 + S)}{(A_1 + S + \epsilon_1 P_1)^2} - \alpha_1 P_2 + \frac{B}{2M} + \frac{\sqrt{B^2 - 4MC}}{2M} = 0 \quad (8.5)$$

Which gives $f(\lambda_1^*) = 0$ and $\lambda_1 = \lambda_1^*$ represent a root of equation (8.5) consequently for $\lambda_1 = \lambda_1^*$ we get $\theta_1\theta_2 = \theta_3$ from which the characteristic equation can be written as

$$\rho(\Lambda) = (\Lambda + \theta_1)(\Lambda^2 + \theta_2) = 0 \quad (8.6)$$

Hence, in such case $\lambda_1 = \lambda_1^*$ the eigenvalues $\Lambda_1 = -\theta_1 < 0$ and $\Lambda_{2,3} = \pm i\sqrt{\theta_2}$ so the first condition of Hopf-bifurcation is satisfied at $\lambda_1 = \lambda_1^*$ that is $\rho_1(\lambda_1^*) = 0$ while $\rho_2 = \sqrt{\theta_2}$, that is $\Lambda_{2,3} = \rho_1(\lambda_1) \pm i\rho_2(\lambda_1)$, substituting $\Lambda = \rho_1 + i\rho_2$ in equation (8.6) we get after some algebraic computations

$$N\rho_1' - \phi\rho_2' = -\theta \quad (8.7)$$

$$\text{where } \frac{d\rho_3(\Lambda)}{d\lambda_1} = \rho_3'(\Lambda)$$

$$\phi\rho_1' - N\rho_2' = -\Gamma \quad (8.8)$$



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

Such that

$$\begin{aligned} N &= 3\rho_1^2 + 2\theta_1\rho_1 + \theta_2 - 3\rho_2^2 \\ \phi &= 6\rho_1\rho_2 + 2\theta_1\rho_2 \\ \theta &= \rho_1^2\theta'_1 + \theta'_2\rho_1 + \theta'_3 - \theta'_1\rho_2^2 \\ \Gamma &= 2\rho_1\rho_2\theta'_1 + \theta'_2\rho_2 \end{aligned} \quad (8.9)$$

Solving the linear system (8.7) and (8.8) for the unknowns ρ'_1, ρ'_2 it is obtained that

$$\rho'_1 = \frac{N\theta + \Gamma\phi}{N^2 + \phi^2}, \rho'_2 = \frac{-\Gamma N + \theta\phi}{N^2 + \phi^2} \text{ Hence, the second condition of Hopf-bifurcation will be reduced to verify that}$$

$$N\theta + \Gamma\phi \neq 0 \quad (8.10)$$

But $\theta'_1 = -1$, $\theta'_2 = c_{11} + c_{33}$ and $\theta'_3 = -\theta_2 + \theta_1(c_{11} + c_{33})$ thus $N = -2\theta_2$, $\phi = 2\theta_1\sqrt{\theta_2}$, $\theta = \theta_1(c_{11} + c_{33})$, $\Gamma = (c_{11} + c_{33})\sqrt{\theta_2}$ substituting in (8.8). we get

$N\theta + \Gamma\phi = 0$. Hence system (2.2) does not undergo a Hopf-bifurcation through E^* .

9. Numerical Analysis.

In this section, we studied the global dynamics of the system (2.2) numerically to verify the obtained analytical results and specifying the control set of parameters. For the following hypothetical set of parameters system (2.2) solved numerically and the obtained trajectories are drawn in the form of phase portrait and time series. First, we examine varying the value of each parameter on the dynamical behavior of the system (2.2). Second assure our obtained analytical results. It is spotted that, for the following set of hypothetical parameters in (9.1) that satisfies stability conditions of the positive equilibrium point E^* , system (2.2) has a globally asymptotically stable coexistence equilibrium point, as illustrated in figure Fig. (1.I) below, with initial condition (0.5, 0.4, 0.5)

$$A_1 = 0.503, A_2 = 0.8, \epsilon_1 = 0.625, \epsilon_2 = 0.011, \lambda_1 = 0.0402, \lambda_2 = 0.2525, \theta_1 = 0.011, \theta_2 = 0.11,$$

$$\alpha_1 = 0.01, \alpha_2 = 0.04 \quad (9.1)$$

Consequently, the following set of hypothetical parameters in (9.2) that satisfies stability conditions of the positive equilibrium point E_2 of system (2.2) has a globally asymptotically stable coexistence equilibrium point, as illustrated in figure Fig. (1.II) below, with initial condition (0.5, 0.4, 0)



$$A_1 = 0.89, A_2 = 0.1, \epsilon_1 = 0.999, \epsilon_2 = 0.3, \lambda_1 = 0.245, \lambda_2 = 0.253, \theta_1 = 0.095, \theta_2 = 0.3,$$

$$\alpha_1 = 0.9, \alpha_2 = 0.041 \quad (9.2)$$

However the set of parameters in (9.3) satisfies stability conditions of the positive equilibrium point E_3 of system (2.2) has a globally asymptotically stable coexistence equilibrium point, as illustrated in figure Fig. (1.III) below, with initial condition (0.5, 0, 0.5)

$$A_1 = 0.5, A_2 = 0.1, \epsilon_1 = 0.9, \epsilon_2 = 0.3, \lambda_1 = 0.0402, \lambda_2 = 0.253, \theta_1 = 0.11, \theta_2 = 0.3,$$

$$\alpha_1 = 0.01, \alpha_2 = 0.041 \quad (9.2)$$

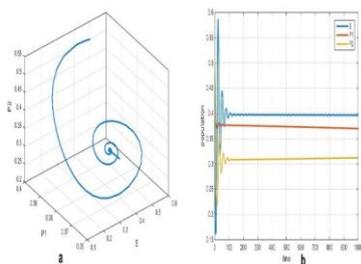


Fig. (1.I)

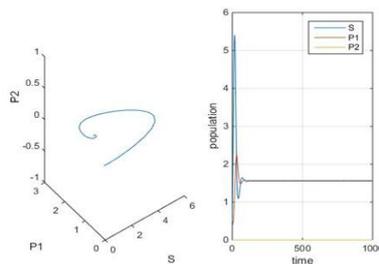


Fig. (1.II)

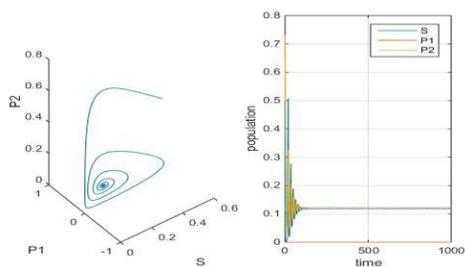


Fig. (1.III)

Fig.1

Fig.1 The trajectories of system (2.2) for the data (9.1) starting from initial point (0.5, 0.4, 0.5), (a) 3D phase portrait for a globally asymptotically coexistence equilibrium E^* , (b) Time series for the attractor in (a) in Fig.(1.I), while in Fig. (1.II) The trajectories of system (2.2) for the data (9.2) starting from initial point (0.5, 0.4, 0), (a) 3D phase portrait for a globally asymptotically coexistence equilibrium E_2 , (b)



Time series for the attractor in (a). **Fig. (1.III)** shows the trajectories of system (2.2) for the data (9.3) starting from initial point (0.5, 0, 0.5), (a) 3D phase portrait for a globally asymptotically coexistence equilibrium E_3 , (b) Time series for the attractor in (a).

It is clear, figure (1) ensures the obtained theoretical finding regarding the existence of globally asymptotically stable coexistence equilibrium points E^*, E_2, E_3 with certain conditions.

Now, by modifying one parameter at a time, the effect of changing the parameter values on the dynamics of the system (2.2) is explored, and the resulting trajectory is shown in figure **Fig.2** that as the environmental carrying capacity of the prey species A_1 recede from $A_1=0.503$ to $A_1=0.4$, the number of predator P_2 individuals species fades

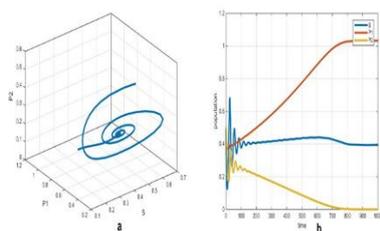


Fig. (2.I)

Fig.2

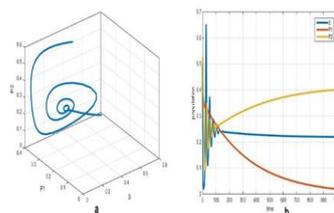


Fig. (2.II)

Fig.2The trajectories of system (2.2) after recede A_1 from $A_1=0.503$ to $A_1=0.4$ in **Fig.(2.I)** the number of predator P_2 individual species fades and when A_2 recede from $A_2=0.8$ to $A_2=0.5$, in **Fig.(2.II)** the number of predator P_1 individuals species fades, with initial point (0.5, 0.4, 0.5) (a) 3D phase portrait of equilibrium E^* , (b) Time series for the attractor in (a).

In the same way, depending on (9.1), if we change ϵ_1 and ϵ_2 (mutual interference in growth between the first and second predators, respectively, depending on eating the largest number of preys), by decreasing it from $\epsilon_1 = 0.626$ to $\epsilon_1 = 0.025$ it will cause a major disruption to the stability of the system shown in the figure **Fig.3**.

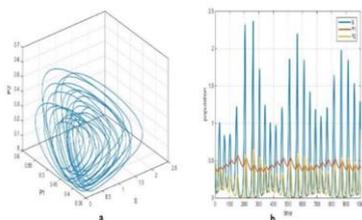


Fig. (3.I)

Fig.3

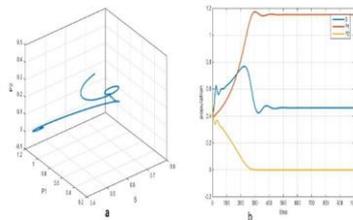


Fig. (3.II)



Fig.3 The trajectories of system (2.2) after recede ϵ_1 from $\epsilon_1 = 0.652$ to $\epsilon_1 = 0.025$ a major disturbance occurs in the stability of system (2.2) in **Fig. (3.I)** and if ϵ_2 increase from $\epsilon_2 = 0.011$ to $\epsilon_2 = 0.89$ the predator population P_1 is steadily increasing to the predator population P_2 fades away to zero however the predator population P_1 is steadily increasing to $P_1 = 1.15$ in **Fig. (3.II)**, with initial point (0.5, 0.4, 0.5), (a) 3D phase portrait of equilibrium E^* , (b) Time series for the attractor in (a).

we can summarize the effect of the parameters on system (2.2) stability in table (9.1) for the equilibrium points E^* , E_2 and E_3 , with initial point (0.5, 0.4, 0.5), (0.5, 0.4, 0) and (0.5, 0, 0.5) respectively as follow:

Table 9.1: The stability of system (2.2) according to the parameters

Parameter's value	Equilibrium point	Stability of the system	Figure
$A_1 = 0.503, A_2 = 0.8, \epsilon_1 = 0.625, \epsilon_2 = 0.011, \lambda_1 = 0.0402, \lambda_2 = 0.2525, \theta_1 = 0.011, \theta_2 = 0.11,$ $\alpha_1 = 0.01, \alpha_2 = 0.04$	E^*	<i>locally asymptotically stable (LAS)</i>	Fig. (1.I)
$A_1 = 0.4, A_2 = 0.8, \epsilon_1 = 0.625, \epsilon_2 = 0.011, \lambda_1 = 0.0402,$ $\lambda_2 = 0.2525, \theta_1 = 0.011, \theta_2 = 0.11,$ $\alpha_1 = 0.01, \alpha_2 = 0.04$	E^*	<i>Unstable</i> (the number of predator P_2 individuals species fades)	Fig.2 (2.I)
$A_1 = 0.503, A_2 = 0.4, \epsilon_1 = 0.625, \epsilon_2 = 0.011,$ $\lambda_1 = 0.0402, \lambda_2 = 0.2525, \theta_1 = 0.011, \theta_2 = 0.11,$ $\alpha_1 = 0.01, \alpha_2 = 0.04$	E^*	<i>Unstable</i> (the number of predator P_1 individuals species fades)	Fig.2 (2.II)
$A_1 = 0.503, A_2 = 0.8, \epsilon_1 = 0.625, \epsilon_2 = 0.011,$ $\lambda_1 = 0.0402, \lambda_2 = 0.2525, \theta_1 = 0.011, \theta_2 = 0.11,$ $\alpha_1 = 0.01, \alpha_2 = 0.04$	E^*	<i>Unstable</i> (major disruption to the stability of the system)	Fig.3 (3.I)
$A_1 = 0.503, A_2 = 0.8, \epsilon_1 = 0.625, \epsilon_2 = 0.89,$ $\lambda_1 = 0.0402, \lambda_2 = 0.2525, \theta_1 = 0.011, \theta_2 = 0.11,$ $\alpha_1 = 0.01, \alpha_2 = 0.04$	E^*	<i>Unstable</i> (the predator population P_2 fades away to zero however the predator population P_1 is steadily increasing to $P_1 = 1.15$)	Fig.3 (3.II)
$A_1 = 0.503, A_2 = 0.8, \epsilon_1 = 0.625, \epsilon_2 = 0.011, \lambda_1 = 0.12,$ $\lambda_2 = 0.2525, \theta_1 = 0.011, \theta_2 = 0.11,$ $\alpha_1 = 0.01,$	E^*	<i>Unstable</i> (the predator population P_2 fades away to zero however the predator population P_1 is steadily increasing to $P_1 = 1.251$)	Fig.4 (4.I)



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

$\alpha_2 = 0.04$			
$A_1 = 0.503, A_2 = 0.8, \epsilon_1 = 0.625, \epsilon_2 = 0.011,$ $\lambda_1 = 0.0402, \lambda_2 = 0.53, \theta_1 = 0.011, \theta_2 = 0.11,$ $\alpha_1 = 0.01, \alpha_2 = 0.04$	E^*	<i>Unstable</i> (the predator population P_1 fades away to zero however the predator population P_2 is steadily increasing to $P_2 = 0.7$)	Fig.4 (4.II)
$A_1 = 0.503, A_2 = 0.8, \epsilon_1 = 0.625, \epsilon_2 = 0.011, \lambda_1 = 0.0402, \lambda_2 = 0.2525, \theta_1 = 0.11, \theta_2 = 0.11,$ $\alpha_1 = 0.01, \alpha_2 = 0.04$	E^*	<i>Unstable</i> (the predator population P_1 fades away to zero however the predator population P_2 is steadily increasing to $P_2 = 0.59$)	Fig.5 (5.I)
$A_1 = 0.503, A_2 = 0.8, \epsilon_1 = 0.625, \epsilon_2 = 0.011, \lambda_1 = 0.0402, \lambda_2 = 0.2525, \theta_1 = 0.011, \theta_2 = 0.11,$ $\alpha_1 = 0.01, \alpha_2 = 0.04$	E^*	<i>Unstable</i> (the predator population P_1 fades away to zero however the predator population P_2 is steadily increasing to $P_2 = 0.78$)	Fig.5 (5.II)
$A_1 = 0.503, A_2 = 0.8, \epsilon_1 = 0.625, \epsilon_2 = 0.011, \lambda_1 = 0.0402, \lambda_2 = 0.2525, \theta_1 = 0.011, \theta_2 = 0.11,$ $\alpha_1 = 0.4, \alpha_2 = 0.04$	E^*	<i>Unstable</i> (the predator population P_1 fades away to zero however the predator population P_2 is steadily increasing to $P_2 = 0.59$)	Fig.6 (6.I)
$A_1 = 0.503, A_2 = 0.8, \epsilon_1 = 0.625, \epsilon_2 = 0.011, \lambda_1 = 0.0402, \lambda_2 = 0.2525, \theta_1 = 0.011, \theta_2 = 0.11,$ $\alpha_1 = 0.01, \alpha_2 = 0.4$	E^*	<i>Unstable</i> (the predator population P_2 fades away to zero however the predator population P_1 is steadily increasing to $P_1 = 1.153$)	Fig.6 (6.II)
$A_1 = 0.89, A_2 = 0.1, \epsilon_1 = 0.999, \epsilon_2 = 0.3, \lambda_1 = 0.245, \lambda_2 = 0.253, \theta_1 = 0.095, \theta_2 = 0.3, \alpha_1 = 0.9,$ $\alpha_2 = 0.04$	E_2	<i>locally asymptotically stable (LAS)</i>	Fig. (1.II)
$A_1 = 0.5, A_2 = 0.1, \epsilon_1 = 0.9, \epsilon_2 = 0.3, \lambda_1 = 0.253, \theta_1 = 0.11, \theta_2 = 0.3, \alpha_1 = 0.253, \alpha_2 = 0.041$	E_3	<i>locally asymptotically stable (LAS)</i>	Fig. (1.III)

The following figures are explained in the above table (9.1)



Fig.6 The trajectories of system (2.2) with initial point (0.5, 0.4, 0.5) by increasing α_1 from $\alpha_1=0.01$ to $\alpha_1=0.4$ the predator population P_1 fades away to zero however the predator population P_2 is steadily increasing to $P_2=0.59$ in **Fig. (6.I)**, and increasing α_2 from $\theta_2=0.04$ to $\theta_2=0.4$ the predator population P_2 fades away to zero however the predator population P_1 is steadily increasing to $P_1=1.153$ in **Fig. (6.II)** (a) 3D phase portrait of equilibrium E^* , (b) Time series for the attractor in (a).

10. Conclusion

A two predator- one prey ecological system had been studied briefly with many functional responses especially Beddington-DeAngelis and Holling type -II and all the previous studies adopted one type of predation functional response for both predators. In this research two different types of functional response model were comprehended which reduce diverse responses from the predator for killing the prey, taking under consideration the competition between the two predators and the environment that combine the three individuals together for living, all of the solution's properties are studied. We obtained that there are only five nonnegative equilibrium points in the system. The topics of stability, feasibility, local bifurcations, and Hopf-bifurcation are all entirely scouted. The numerical simulation was used to examine global dynamics and determine the impact of changing parameters using a set of hypothetical data. The next observation was locate

- 1- By modifying one parameter at a time, the effect of changing the parameter values as the environmental carrying capacity of the prey species A_1 recede from $A_1=0.503$ to $A_1=0.4$, the number of predator P_2 individuals species fades.
- 2- If we change ϵ_1 and ϵ_2 (mutual interference in growth between the first and second predators, respectively, depending on eating the largest number of preys), by decreasing it from $\epsilon_1 = 0.626$ to $\epsilon_1 = 0.025$ it will cause a major disruption to the stability of system (2.2).
- 3- Increasing λ_1 from $\lambda_1=0.0402$ to $\lambda_1=0.12$ the predator population P_2 fades away to zero however the predator population P_1 is steadily increasing to $P_1=1.251$, and increasing λ_2 from $\lambda_2=0.253$ to $\lambda_2=0.53$ the predator population P_1 fades away to zero however the predator population P_2 is steadily increasing to $P_2=0.7$. (λ_1, λ_2 are the maximum number of the prey that can be eaten by the first and second predator per unit time respectively)
- 4- Increasing θ_1 from $\theta_1=0.011$ to $\theta_1=0.11$ the predator population P_1 fades away to zero however the predator population P_2 is steadily increasing to $P_2=0.59$, and decreasing θ_2 from $\theta_2=0.11$ to $\theta_2=0.011$ the predator population P_1 fades away to zero however the predator population P_2 is steadily increasing to $P_2=0.78$. (θ_1, θ_2 are the rates at which the growth rate of the first predator is annihilated by the second predator and vice versa)
- 5- Increasing α_1 from $\alpha_1=0.01$ to $\alpha_1=0.4$ the predator population P_1 fades away to zero however the predator population P_2 is steadily increasing to $P_2=0.59$, and



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

increasing α_2 from $\theta_2=0.04$ to $\theta_2=0.4$ the predator population P_2 fades away to zero however the predator population P_2 is steadily increasing to $P_2=1.153$. (α_1, α_2 are the predators P_1, P_2 death rates respectively).

References:

- [1] Mira-Cristiana Anisiu, " LOTKA, VOLTERRA AND THEIR MODEL", DIDACTICA MATHEMATICA, Vol. 32(2014), pp. 9–17
- [2] R. K. Ghaziani., " Dynamics and bifurcations of a Lotka-Volterra population model", *Iranian Journal of Science & Technology, IJST*, vol. 38A3, pp. :265-279, 2014.
- [3] C. S. HoLLING, the Components of Predation as Revealed by a Study of Small. Mammal Predation of the European Pine Sawfly, *The Canadian Entomologist*, Volume XCI, Number 5, May 1959, pp:234-261.
- [4] PIERSMA, T., GILS, J.V., DE GOEIJ, P. and JAAP VAN DER MEER, Holling's functional response model as a tool to link the food-finding mechanism of a probing shorebird with its spatial distribution, *Journal of Animal Ecology*, vol.64, 1995, pp:493-504.
- [5] Noori, Saba, An Analysis of a Partial Temporary Immunity SIR Epidemic Model with Nonlinear Treatment Rate, *Baghdad Science Journal*, Vol.16(3)2019, pp:639-647.
- [6] Noori, Saba, Stability analysis of SIR holing type II infectious epidemic model with treatment failure rate, *Mathematical Theory and Modeling*, Vol.6, No.2, 2016, pp: 50-60.
- [7] Noori, Saba, Local Bifurcation Analysis for a Special Type of SIR Epidemic Model, *International Journal of Science and Research (IJSR)*, Volume 6 Issue 2, February 2017, pp:1143-1146.
- [8] R. Arditi and L. Ginzburg, *How Species Interact: Altering the Standard View on Trophic Ecology*. Oxford, University Press USA. (2012).



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية

[9] Zhihui Ma1, Shufan Wang, Stability analysis of prey-predator system with Holling type functional response and prey refuge, Springer, Advances in Difference Equations (2017).

[10] Noori, Saba and Najj, Raid Kamel, Dynamical Behavior of two predators one prey Ecological system with refuge and Beddington –De Angelis functional response, Iraqi Journal of Science, vol. 64, no.12, December 2023, pp: 6383-6400.

[11] Noori, Saba, Dynamical Study of an SIR Epidemic Model with Nonlinear Incidence Rate and Regress of Treatment, Ibn Al- Haitham Journal for Pure and Applied science, 2017, Special Issue, pp: 384-396.

[12] Zhang, Shuwen, and Chen, Lansun, A study of predator-prey models with the Beddington-DeAngelis functional response and impulsive effect, Chaos, Solitons and Fractals, Volume 27, January 2006, Issue 1, p. 237-248.

[13] Raveendra Babu A.1 and Gayathri P, Mathematical Study of One Prey and Two Competing Predators Considering Beddington-DeAngelis Functional Response with Distributed Delay, Hilbert Journal of Mathematical Analysis, Vol. 2, no.1 (2023), pp: 1–19.

[14] J. Heinonen. " Lectures on Analysis on Metric Spaces",
Springer Science Business Media New York, pp. 43-48, 2001.

[15] Henk Nijmeijer • Arjan van der Schaft , "Nonlinear Dynamical Control Systems",
Springer Science and Business Media LLC New York, March 2013, p.p. 277-282.

[16] O. Katsuhiko. "Modern Control Engineering", *Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall*, pp. 252–258, 1970.

[17] L. Perko . " Differential Equations and Dynamical Systems", *Springer, New York, NY, USA*, 3rd edition, pp. 23-101, 2001.

[18] T. Erneux ,P. Glorieux. " Laser Dynamics", *Cambridge University Press*, pp. 84 – 108, 2010.



المؤتمر العلمي الدولي الرابع عشر
لجمعية الرياضيات العراقية والمنعقد تحت شعار
الإبداع يلتقي بالتحديات من أجل التقدم العلمي والتكنولوجي
للمدة 4 - 5 اب 2024
دمشق - سورية