إعداد
ا.د. نوري فرحان المياحي
قسم الرياضيات / كلية العلوم / جامعة القادسية

مبرهنات الوجود والوحدانية

من كوشي إلى باناخ : رحلة في التحليل الرياضي

إعداد

ا.د. نوري فرحان المياحي

قسم الرياضيات / كلية العلوم / جامعة القادسية

محاضرات أ.د. نوري فرحان المياحي / قسم الرياضيات / كلية العلوم / جامعة القادسية

المقدمة

تُعد مبرهنات الوجود والوحدانية من الركائز الأساسية في التحليل الرياضي، إذ تمثل الضمان النظري لوجود الحلول الفريدة في العديد من المعادلات والمسائل الرياضية، لاسيما في المعادلات التفاضلية والمعادلات التكاملية. تأخذنا هذه الورشة في رحلة علمية ممتعة تبدأ من البدايات المفاهيمية مع أوجين كوشي، الذي أسهم في ترسيخ المفاهيم الأساسية للاتصال والاستمرارية، ومرورًا بالتطورات الكبرى التي شهدها القرن العشرون مع ستيفان باناخ، الذي فتح آفاقًا واسعة في فضاءات الدوال والتحليل الدالي، وأسّس لإطار نظري متكامل لمبرهنات الوجود والوحدانية باستخدام أدوات مثل مبرهنة النقطة الثابتة.

في هذه الورشة، ننطلق في رحلة علمية عبر محطات فارقة في تاريخ التحليل الرياضي، نستعرض خلالها تطور مبرهنات الوجود والوحدانية بدءًا من جهود كوشي في صياغة مفاهيم الدوال المتصلة والمعادلات التفاضلية، وصولًا إلى إسهامات باناخ في تأسيس فضاءات المتجهات والتحليل الدالي.

تهدف الورشة إلى إلقاء الضوء على الخلفية النظرية لهذه المبرهنات، واستكشاف تطبيقاتها المتنوعة في العلوم والهندسة، مع التركيز على الأساليب التحليلية الحديثة المستخدمة لضمان وجود الحلول الفريدة للمشكلات الرياضية المعقدة. مرة أخرى سنسلط الضوء على أهمية هذه المبرهنات في ضمان وجود حلول فريدة للمسائل الرياضية والفيزيائية، مع مناقشة تطبيقات معاصرة في علوم الهندسة والرياضيات التطبيقية.

محاور الورشة:

المحور الأول : المفاهيم الأساسية للوجود والوحدانية

هذا المحور يتضمن عرضًا مبسطًا ومركزًا للمفاهيم الأساسية للوجود والوحدانية مثل التعريف الرياضي للحل، الوجود، والوحدانية.أمثلة من الحياة الواقعية توضح أهمية هذه المفاهيم ،والتي يمكن استخدامه كمحور افتتاحي في الورشة:.

1. تعريف الحل في السياق الرياضي : الحل هو دالة أو مجموعة قيم تحقق معادلة أو نظام معادلات معين ضمن شروط محددة (ابتدائية أو حدية).

2. مفهوم الوجود (Existence): يشير إلى وجود حل واحد على الأقل لمسألة رياضية معينة تحت شروط محددة. أي أن هناك دالة تحقق المعادلة وتلبي الشروط المعطاة.

3. مفهوم الوحدانية (Uniqueness): يعني أن الحل الموجود هو الوحيد ولا يوجد أي حل آخر يحقق المعادلة مع نفس الشروط.

الوحدانية ضرورية لتحديد سلوك النظام بدقة دون غموض.

4. لماذا هما مهمّان؟

بدون "الوجود"، لا فائدة من محاولة إيجاد حل.

وبدون "الوحدانية"، قد لا يكون الحل مستقرًا أو موثوقًا، مما يضعف النماذج التنبؤية.

5. شروط الوجود والوحدانية: تختلف باختلاف نوع المعادلة (تفاضلية، تكاملية، جبرية...)، ولكنها غالبًا تتعلق بخواص مثل: الاستمرارية (Continuity) ، الليبتشيتز (Lipschitz Condition) ، القيود الحدية أو الابتدائية.

6. أمثلة توضيحية:

المعادلة التفاضلية : $\frac{dy}{dx} = y$ ، مع الشرط $y(0) = 1$ لها حل وحيد: $y(x) = e^x$

بينما المعادلة $\frac{dy}{dx} = \sqrt{|y|}$ ، مع $y(0) = 0$ لها أكثر من حل، وبالتالي لا تحقق الوحدانية.

المحور الثاني : إسهامات كوشي في تأسيس التحليل الرياضي

في قلب القرن التاسع عشر، برز عالم رياضيات فرنسي يُدعى أوغستان-لويس كوشي (Augustin-Louis Cauchy)، ليُحدث تحولًا جذريًا في فهمنا للرياضيات. وُلد كوشي في فرنسا عام 1789، ويُعد من أبرز رواد التحليل الرياضي الحديث، إذ وضع الأسس الصارمة للكثير من المفاهيم التي نستخدمها اليوم مثل النهاية، التقارب، الاستمرارية، وسلاسل القوى.كان كوشي من أوائل من أدركوا أهمية الصياغة الدقيقة في إثباتات الرياضيات، مما مهد الطريق لتطوير مبرهنات الوجود والوحدانية، خاصة في سياق المعادلات التفاضلية. وقد ساهم بشكل بارز في إنشاء ما يُعرف اليوم بالتحليل العقدي من خلال مبرهنته الشهيرة في التكامل. بفضل أعماله الغزيرة " التي تجاوزت 700 بحث ومقالة" أصبح اسمه محفورًا في تاريخ العلم، بل وخلّده الفرنسيون بوضع اسمه على برج إيفل إلى جانب كبار العلماء. في هذا المحور، نسلط الضوء على

إسهامات كوشي المفصلية، والتي مهدت الطريق لاحقًا لظهور مبرهنات حديثة في فضاءات أكثر تجريدًا، مثل فضاءات باناخ وهيلبرت. مرة أخرى يُعد أوغستان- لويس كوشي (1789–1857) من أبرز رواد التحليل الرياضي، حيث ساهم بشكل جوهري في تحويله من علم قائم على الحدس إلى علم صارم قائم على البرهان والدقة.

أولا : التأسيس الصارم لمفاهيم التحليل:

1.قدم كوشي أول تعريف دقيق لمفهوم الغاية (Limit) باستخدام فكرة الاقتراب.

2.صاغ تعريفًا صارمًا لاستمرارية (Continuity) للدوال.

3.ساهم في توضيح مفهوم التقارب (Convergence) لسلاسل الأعداد والدوال، وقدم معيار كوشي للتقارب.

ثانيا : المعادلات التفاضلية والوجود والوحدانية:

1.عالج كوشي مسائل الوجود والوحدانية للحلول في المعادلات التفاضلية العادية، وهو ما يُعرف الآن بـ مبرهنة كوشي-ليبسيتز.

2.كان أول من قدم صياغة منظمة لمسألة القيمة الابتدائية (Initial Value Problem) وسعى لإثبات وجود الحل ووحدانيته.

ثالثا : تطوير مفاهيم في التكامل: ساهم في إعطاء تعريف أدق لمفهوم التكامل المحدد، ممهدًا الطريق لاحقًا لتعريفات ريمان ولِبيسغ.

رابعا : التحليل العقدي (تحليل الدوال العقدية):

1.أسس التحليل العقدي كفرع مستقل من التحليل الرياضي.

2.أدخل مفاهيم مثل تكامل كوشي ومبرهنة كوشي، والتي أصبحت أساسًا لتحليل الدوال ذات المتغير المركب.

خامسا : تأثيره على الرياضيات الحديثة:

1.أعماله كانت تمهيدًا لظهور مدارس التحليل الحديثة، ومنها أعمال باناخ، فيرشتراس، وريمان.

2. ركز على أهمية الصرامة الرياضية مما أدى إلى صياغة أدق للمبرهنات والمعايير.

المحور الثالث : مقدمة إلى فضاءات باناخ ونظرية النقطة الصامدة

في مطلع القرن العشرين، وُلدت فروع جديدة في الرياضيات تهدف إلى دراسة الفضاءات اللانهائية الأبعاد، وكان من أبرز رواد هذا التوجه العالم البولندي ستيفان باناخ (Stefan Banach)، أحد مؤسسي التحليل الدالي الحديث. وُلد باناخ عام

1892 في بولندا، واستطاع خلال فترة قصيرة أن يُحدث ثورة مفاهيمية في الرياضيات من خلال إدخاله مفهوم فضاء باناخ، وهو فضاء متجهات مزود بمعيار (Norm) ويكون كاملًا (أي كل سلسلة كوشي فيه تتقارب إلى عنصر في الفضاء). فضاءات باناخ تُشكل الإطار الطبيعي لدراسة المعادلات التفاضلية، والمعادلات التكاملية، والمشاكل التغايرية، حيث مكّن هذا المفهوم من تطبيق أدوات تحليلية دقيقة في دراسة الوجود والوحدانية. ومن أعظم إنجازاته أيضًا ما يُعرف بـ مبرهنة باناخ للنقطة الصامدة (Banach Fixed Point Theorem)، التي أصبحت أداة مركزية لإثبات وجود الحلول لمسائل كثيرة، بدءًا من المعادلات التفاضلية إلى الخوارزميات العددية. لقد كان إسهام باناخ حجر الأساس لتحليل أكثر عمقًا وتجريدًا، مهّد الطريق للعديد من النظريات في فضاءات هلبرت، والتحليل الطيفي، والمشاكل غير الخطية.

فضاءات باناخ تمثل أحد المفاهيم المحورية في التحليل الدالي، وهي امتداد طبيعي لفكرة الفضاءات الإقليدية إلى سياقات أكثر عمومية. سُمّيت نسبة إلى الرياضي البولندي ستيفان باناخ، الذي أسس هذا الإطار الرياضي في أوائل القرن العشرين.

أولا : تعريف فضاء باناخ : هو فضاء معياري (Normed Space) يكون كاملًا، أي أن كل متتالية كوشية فيه تكون متقاربة إلى عنصر ضمن الفضاء نفسه.

هذا الشرط من "الكمال" هو ما يميز فضاءات باناخ عن غيرها، ويجعلها بيئة مثالية لدراسة التابعيات والمعادلات.

ثانيا : أهمية فضاءات باناخ:

1. تُستخدم في دراسة المعادلات التكاملية والجزئية.
2. توفر إطارًا تحليليًا عامًا يضم كثيرًا من الفضاءات المستخدمة في الفيزياء والهندسة.
3. تُعتبر الأساس لفروع تحليلية كثيرة مثل التحليل الدالي .

ثالثا : مبرهنة النقطة الصامدة لباناخ : من أشهر النتائج في فضاءات باناخ هي مبرهنة النقطة الصامدة لباناخ (Banach Fixed Point Theorem)، والتي تنص على : إذا كان لدينا دالة انكماشية (Contractive Mapping) معرفة على فضاء باناخ مغلق جزئيًا، فإنها تملك نقطة صامدة وحيدة، أي : يوجد x^* بحيث $T(x^*) = x^*$.

رابعا : التطبيقات:

1. إثبات وجود الحلول في المعادلات التفاضلية.
2. النماذج العددية التكرارية في التحليل العددي.
3. المعادلات اللاخطية والتقريب العددي.

إعداد
ا.د. نوري فرحان المياحي
قسم الرياضيات / كلية العلوم / جامعة القادسية

مقارنة بين كوشي وباناخ من حيث الأسلوب والتأثير العلمي

في ختام المحور الثالث يمكن إجراء فقرة مقارنة بين كوشي(1857 -1789 م) وباناخ (1892 – 1945 م)من حيث الأسلوب والتأثير العلمي (من الدقة التحليلية إلى التجريد البنائي) أو كنقطة انتقالية بين المحورين : يشكل كل من أوغستان- لويس كوشي وستيفان باناخ علامتين فارقتين في تطور التحليل الرياضي، غير أن مساريهما يعكسان مرحلتين فكريتين مختلفتين:

1.السياق الزمني بالنسبة إلى كوشي كان القرن التسع عشر بداية التحليل الحديث بينما السياق الزمني بالنسبة إلى باناخ كان القرن العشرون عصر التجريد والدوال .

2.المنهج العلمي بالنسبة إلى كوشي يمثل تأسيس الدقة في المفاهيم الرياضية (الغاية ، التقارب ، الاستمرارية) بينما المنهج العلمي إلى باناخ يمثل بناء هياكل رياضية تجريدية (فضاءات معيارية وكاملة).

3.الأدوات المستخدمة بالنسبة إلى كوشي تمثل التحليل الكلاسيكي ، المعادلات التفاضلية ، المثاليات بينما الأدوات المستخدمة بالنسبة إلى باناخ تمثل التحليل الدالي ، النقاط الصامدة ، الفضاءات اللانهائية

4.الهدف الأساسي بالنسبة إلى كوشي إعطاء أساس رياضي صارم للتحليل بينما الهدف الأساسي بالنسبة إلى باناخ توسيع نطاق التحليل إلى فضاءات أكثر عمومية وتجريد.

5. الأثر العلمي بالنسبة إلى كوشي مهد الطريق للصرامة المنهجية في الرياضيات ، الأثر العلمي بالنسبة إلى باناخ وضع حجر الأساس للتحليل الدالي الحديث .

رغم اختلاف السياق، جمعتهما الرؤية العميقة في التعامل مع مفهوم الحل، وسعيهما نحو الوجود والوحدانية كأساس لفهم الظواهر الرياضية والطبيعية.

المحور الرابع : مبرهنات الوجود والوحدانية في المعادلات التفاضلية

تعد مبرهنات الوجود والوحدانية الأساس النظري لضمان أن المعادلات التفاضلية التي تصف الظواهر الطبيعية تمتلك حلولًا موجودة ووحيدة، مما يضفي على النماذج العلمية طابعًا من الموثوقية والدقة.

أولا : مسألة القيمة الابتدائية (Initial Value Problem): يُدرس وجود ووحدانية الحل غالبًا في المسألة التالية :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0$$

ثانيا : مبرهنة بيكارد–ليندلوف (Picard–Lindelöf Theorem): وهي من أشهر مبرهنات الوجود والوحدانية، وتُعطي شروطًا كافية لضمان وجود حل وحيد.

نص المبرهنة: إذا كانت $f(x,y)$ مستمرة في مستطيل حول (x_0,y_0)، وتحقق شرط ليبتشيتز (Lipschitz Condition) في المتغير y، فإن هناك حلًا وحيدًا للمعادلة التفاضلية في جوار .

ثالثا : شرط ليبتشيتز: هناك ثابت $L>0$ بحيث : $|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L|y_1-y_2|$

رابعا: مبرهنة بيانو (Peano Existence Theorem): إذا كانت $f(x,y)$ مستمرة فقط (دون شرط ليبتشيتز)، فإن هناك حلًا واحدًا على الأقل (أي: ضمان الوجود فقط دون الوحدانية).

خامسا : أهمية هذه المبرهنات:

1. تُستخدم في التأكد من صحة النماذج التفاضلية في الفيزياء والهندسة.
2. تساعد في تطوير الأساليب العددية والتقريبية لحل المعادلات.
3. توضح الحالات التي قد تفشل فيها النماذج (عدم وجود أو تعدد الحلول).

سادسا : تطبيقات عملية:

1. نماذج النمو السكاني.
2. النظم الميكانيكية والكهربائية.
3. النماذج الوبائية وانتشار الأمراض.

المحور الخامس : مبرهنات الوجود والوحدانية في المعادلات التكاملية والجزئية

المعادلات التكاملية والجزئية تُستخدم على نطاق واسع في النمذجة الرياضية للظواهر الفيزيائية والهندسية، مثل انتشار الحرارة، الموجات، والجاذبية. لضمان أن لهذه النماذج حلولًا رياضية سليمة ووحيدة، نحتاج إلى مبرهنات الوجود والوحدانية المناسبة لها.

أولًا: المعادلات التكاملية

1. النوع الأساسي : $y(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)y(t)dt+f(x)$

2. مبرهنة النقطة الصامدة (باناخ):

تُستخدم لإثبات وجود وحيد للحل في فضاءات باناخ.

إذا كانت الدالة المعرفة بواسطة التكامل انكماشية، فباناخ يضمن وجود نقطة صامدة ، أي حل وحيد.

3. تطبيقات: فيزياء الكم، النقل الحراري، مسائل التحليل العددي.

ثانيًا: المعادلات التفاضلية الجزئية (PDEs)

1. أمثلة شائعة : معادلة لابلاس : $\Delta u = 0$ ، معادلة الحرارة : $\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \Delta u$ ، معادلة الموجة : $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u$

ثانيا : مبرهنات وجود ووحدانية معروفة:

1.مبرهنة لكس-ميلغرام (Lax-Milgram Theorem): تُستخدم لإثبات وجود وحيد للحل الضعيف (Weak Solution) في فضاءات هيلبرت.

2.نظرية الحلول الضعيفة (Weak Solutions): تُستخدم عندما لا تكون الحلول الكلاسيكية موجودة، وتُثبت باستخدام أدوات التحليل الدالي.

ثالثا: طرق الإثبات:

1.طرق الطاقة (Energy Methods).

2.تحويل المعادلات إلى صور تكاملية.

3.أساليب الفروق أو العناصر المنتهية.

أهمية هذه المبرهنات:

1.تضمن صلاحية النماذج الرياضية في تمثيل الظواهر.

2.تُستخدم كأساس لتطوير حلول عددية.

3.تساعد في فهم استقرار الحل وسلوكه على المدى الطويل.

المحور السادس : التحديات الحديثة في إثبات الوجود والوحدانية

رغم التطور الكبير في التحليل الرياضي، ما زالت مسألة إثبات الوجود والوحدانية للحلول في نماذج رياضية معقدة تشكل تحديًا كبيرًا في مجالات متعددة من الرياضيات والعلوم التطبيقية. وتتلخص التحديات الحديثة فيما يلي:

أولا : النماذج غير الخطية (Nonlinear Models):

1.المعادلات غير الخطية تمثل معظم الظواهر الحقيقية (مثل ميكانيكا السوائل أو الكيمياء الحيوية).

د. نوري فرحان المياحي / قسم الرياضيات / كلية العلوم / جامعة القادسية

2.إثبات وجود ووحدانية الحلول يتطلب أدوات تحليلية متقدمة وغير مباشرة (مثل الطرائق التكرارية أو نظرية النقطة الثابتة العامة).

ثانيا : المسائل في الأبعاد العالية (High-dimensional Problems):

1.تظهر في الذكاء الاصطناعي، الفيزياء الكمية، ومحاكاة النظم المعقدة.

2.يصعب تطبيق المبرهنات الكلاسيكية بسبب التعقيد الحسابي وسلوك الحلول غير المتوقع.

ثالثا : الشروط الحدية غير التقليدية (Irregular Boundary Conditions):

1.في بعض النماذج تكون الحدود غير منتظمة أو حتى متغيرة مع الزمن.

2.هذه الحالات تجعل المسألة غير جيدة التحديد (Ill-posed)، مما يعيق إثبات الوجود أو الوحدانية.

رابعا : المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية (Nonlinear PDEs):

1.مثل معادلة نافير-ستوكس (Navier–Stokes) في ميكانيكا الموائع، التي لا تزال حلولها غير مفهومة تمامًا.

2.وجود حلول ناعمة (Smooth Solutions) لهذه المعادلات في الأبعاد الثلاثية ما يزال أحد مسائل الألفية المفتوحة.

خامسا : الحلول الضعيفة والفائقة (Weak and Viscosity Solutions):

1.في كثير من الحالات، لا توجد حلول كلاسيكية، لذا يتم اللجوء إلى تعريفات أضعف للحلول.

2.إثبات وجود ووحدانية في هذه الحالات يتطلب إعادة تعريف المفاهيم الأساسية بشكل دقيق.

سادسا : التحديات الحسابية (Computational Barriers): حتى عندما يمكن إثبات وجود نظريًا، فإن حساب هذه الحلول فعليًا قد يكون مستحيلًا عدديًا أو مكلفًا جدًا.

خلاصة : تتطلب مواجهة هذه التحديات تطوير أدوات تحليلية جديدة، ودمج التحليل الرياضي بالنمذجة الحاسوبية، إضافة إلى التعاون بين علماء الرياضيات والفيزيائيين والمهندسين.

المحور السابع : نماذج وتطبيقات عملية لمبرهنات الوجود والوحدانية

تبرز أهمية مبرهنات الوجود والوحدانية في التطبيقات الواقعية التي تعتمد على النماذج الرياضية الدقيقة، ومنها:

أولا : المعادلات التفاضلية في النمذجة الفيزيائية:

1.معادلة الحرارة (Heat Equation): تصف انتقال الحرارة في المواد، وتُستخدم مبرهنة بيكارد-ليندلوف لإثبات وجود حل فريد عند معرفة درجة الحرارة الابتدائية.

2.معادلة الموجة (Wave Equation): تُستخدم في الصوت، الزلازل، والكهرومغناطيسية، وتعتمد النماذج على وجود حل فريد لضمان صحة المحاكاة.

ثانيا : معادلات نافير- ستوكس (Navier–Stokes Equations):

1.نموذج لسلوك الموائع (السوائل والغازات).

2.إثبات وجود الحلول الملساء في الأبعاد الثلاثية لا يزال من التحديات الكبرى في الرياضيات.

ثالثا: الأنظمة البيئية والوبائية

نماذج SIR لانتشار الأمراض : تعتمد على معادلات تفاضلية غير خطية، ومبرهنات الوجود تضمن إمكانية تحليل سلوك الانتشار رياضيًا.

رابعا: التطبيقات في الاقتصاد والتمويل

نموذج بلاك-شولز (Black-Scholes):يُستخدم لتسعير الخيارات المالية ويُبنى على معادلة تفاضلية جزئية، حيث تُستخدم مبرهنات الوجود لتحليل الحلول.

خامسا : النماذج في الذكاء الاصطناعي وعلوم البيانات

1.الشبكات العصبية العميقة تتطلب حل معادلات تفاضلية أو تكاملية ضمن خوارزميات التعلم.

2.إثبات الوجود يساعد في التحقق من استقرار الخوارزميات وسلوكها.

سادسا : الميكانيكا والهندسة

1.نماذج الإجهاد والانفعال في الأجسام المرنة تعتمد على معادلات تفاضلية جزئية.

2.تُستخدم مبرهنات مثل لكس- ميلغرام ونظرية النقطة الصامدة لضمان وجود الحلول.

خلاصة: تبرز مبرهنات الوجود والوحدانية كأدوات حاسمة في ضمان أن النماذج الرياضية ليست مجرد افتراضات بل تمثيلات يمكن تحليلها وتوقع سلوكها.

النتائج والتوصيات

أولًا: النتائج

1. تعزيز الفهم النظري لمفاهيم الوجود والوحدانية في سياق التحليل الرياضي، من خلال التدرج التاريخي والفكري من كوشي إلى باناخ.

2. توضيح الدور المحوري لمبرهنات الوجود والوحدانية في بناء النماذج الرياضية في مجالات متعددة كالمعادلات التفاضلية، المعادلات التكاملية، والتحليل الدالي.
3. إبراز أهمية فضاءات باناخ ونظرية النقطة الثابتة في معالجة المسائل غير الخطية وإثبات وجود الحلول.
4. عرض تطبيقات عملية واقعية تُظهر كيف أن هذه المبرهنات تُستخدم فعليًا في نمذجة الظواهر الفيزيائية والاقتصادية والطبيعية.
5. رصد التحديات المعاصرة في هذا المجال، خصوصًا في المعادلات غير الخطية والمعادلات ذات الشروط الحدية غير القياسية، أو ذات الأبعاد العالية.

ثانيًا: التوصيات

1. تعزيز البحث العلمي في مبرهنات الوجود والوحدانية ضمن السياقات التطبيقية، مثل النمذجة البيئية، والذكاء الاصطناعي، والعلوم الطبية.
2. تشجيع دمج المفاهيم النظرية بمشاريع تطبيقية في مراحل التعليم الجامعي والدراسات العليا.
3. اقتراح مقررات متخصصة في التحليل الحديث تُركّز على الوجود والوحدانية وتطبيقاتها في المعادلات التفاضلية والجزئية.
4. تنظيم ورش عمل مستقبلية تتناول أدوات تحليلية متقدمة مثل الحلول الضعيفة، النظرية الطيفية، وأدوات التحليل اللاخطي.
5. التأكيد على أهمية التقاطع بين التحليل الرياضي والبرمجيات الحاسوبية لإيجاد حلول عددية تقريبية في المسائل المعقدة التي يصعب حلها تحليليًا.

أ.د. نوري فرحان المياحي / قسم الرياضيات / كلية العلوم / جامعة القادسية